Ing. Gustavo Sinek L.

Determinación de las dimensiones de una pieza de sección T de hormigón armado, solicitada por un momento y una fuerza axial

Cuando las fuerzas exteriores, que solicitan una pieza de sección T, producen tensiones de tracción al lado de la losa, no se tendrá que tomar en consideración a ésta, y el procedimiento de cálculo será idéntico al que se aplica en el caso de una pieza de sección rectangular. Este caso sucede, por ejemplo, en las secciones de un pilar de un marco rígido articulado en su base, cuando sobresale hacia el interior del edificio (véase fig. 1.a).

Cuando, por el contrario, las fuerzas exteriores causan tensiones de compresión al lado de la losa (véase por ejemplo fig. 1,b), se tendrá que distinguir, si el eje neutro está situado por dentro de la losa, o si él cruza el nervio.

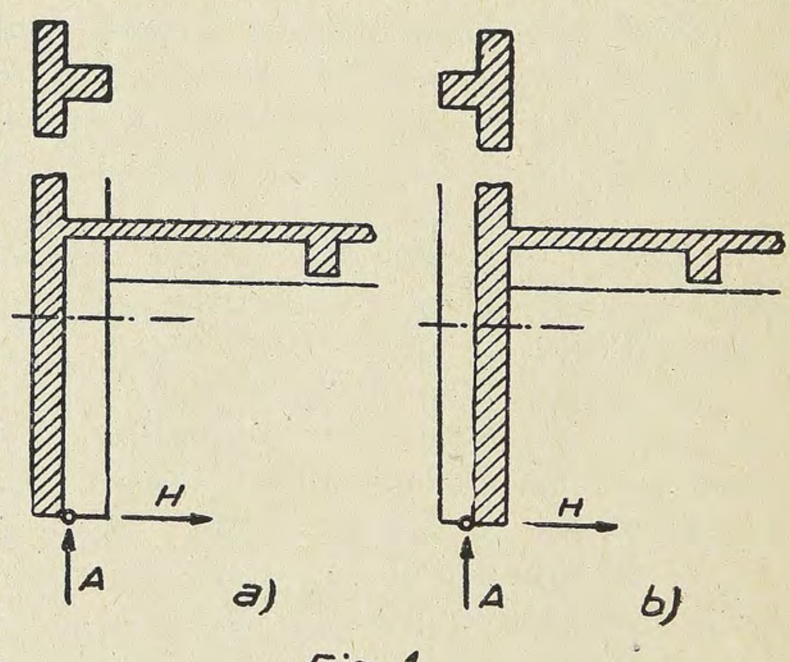

Fig. 1

En el primer caso se aplicará también uno de los varios métodos conocidos para seccciones rectangulares, por ejemplo los cuadros gráficos muy simples y exactos de E. Moersch (E. Moersch: «Der Eisenbeton», Edición Konrad Wittwer, Stuttgart). Como anchura de la sección rectangular se tiene que substituir en las fórmulas correspondientes la anchura efectiva de la losa, o sea la anchura que se puede considerar como zona de compresión (véase «Normas para el cálculo y la construcción de obras de hormigón armado», párrafo 50). El estudio siguiente se ocupa solamente del caso segundo, a saber: que el eje neutro cruza el nervio. En el cálculo de vigas de sección T solicitadas solamente por un momento se suele prescindir de las tensiones de compresión recogidas por el nervio. En el caso que nos ocupa se hará abstracción frecuentemente de esta simplificación por razón de economía. En lo que sigue se examinarán ambos casos.

Los símbolos aplicados corresponden a los de las «Normas». Además deben tenerse presente las siguientes notaciones:

M_f' = momento de las fuerzas exteriores respecto al centro de la sección transversal de la armadura de compresión;

M_f = momento de las fuerzas exteriores respecto al centro de la sección transversal de la armadura de tracción;

C_h = fuerza interior de compresión recogida por el hormigón;

C_f = fuerza interior de compresión recogida por la armadura de compresión;

T_f = fuerza interior de tracción recogida por la armadura de tracción.

El problema es el siguiente:

Sean dados:

a) El momento de flexión M de las fuerzas exteriores, considerado positivo, cuando produce tensiones de compresión al lado de la losa; la fuerza axial exterior N, considerada positiva, cuando produce tensiones de compresión;

b) Las dimensiones de la sección transversal del hormigón: a, a_o, h, h_o, d, d';

c) La tensión de compresión del hormigón σ_h y la tensión de tracción del fierro σ_f. En general estas tensiones corresponderán a las admisibles.

Serán determinadas:

La sección transversal de la armadura de tracción S_f y la de compresión S_f'.

Los momentos M_f' y M_f salen de las ecuaciones siguientes (véase fig. 2 ó 3):

$$(1)\qquad \begin{cases} M_f' = M - N\left(\dfrac{h_o}{2} - d'\right) \\[2ex] M_f = M + N\left(\dfrac{h_o}{2} - d'\right) \end{cases}$$

A) Se toman en consideración las tensiones de compresión recogidas por el nervio (véase fig. 2).

Según la ley de Hooke y bajo la suposición que las deformaciones son proporcionales a las distancias al eje neutro, resulta:

$$(2A)\qquad x = \frac{n\,\sigma_h}{\sigma_f + n\,\sigma_h}\,d = s.d$$

$$(3A)\qquad \sigma_f' = \sigma_f\,\frac{x - d'}{d - x}$$

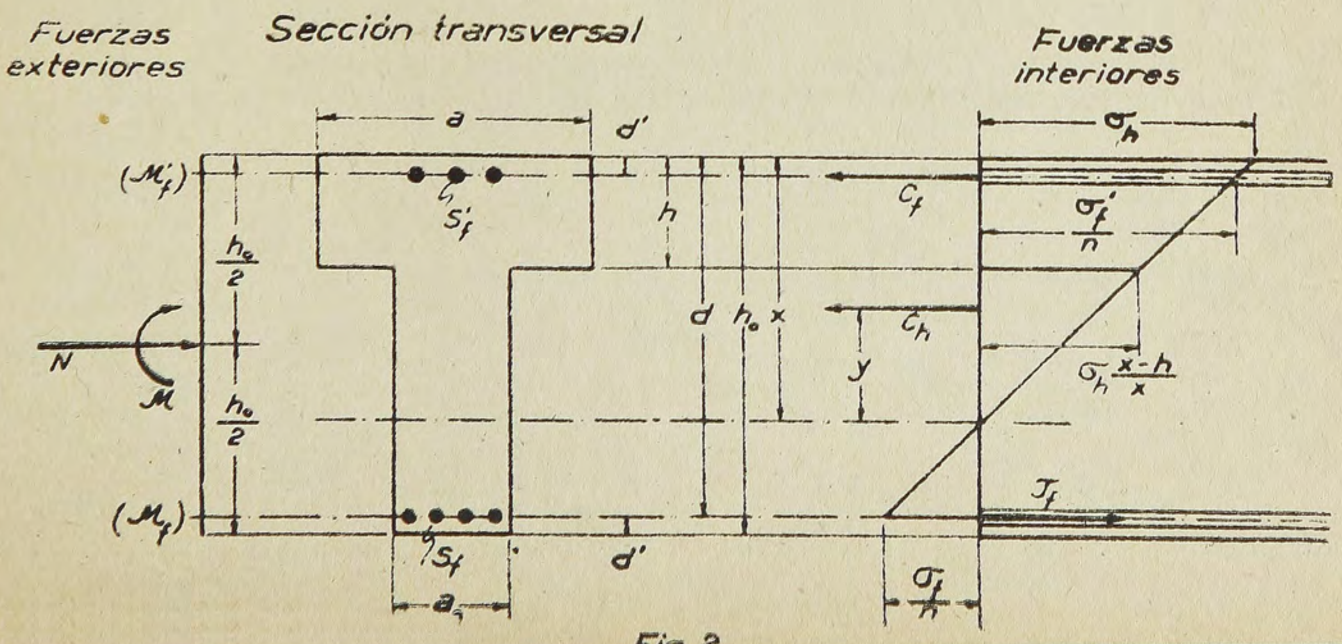

Fig. 2

El coeficiente s de la ecuación (2A), se puede obtener directamente de los cuadros conocidos para la determinación de las dimensiones de piezas solicitadas por flexión simple. Por ejemplo, para $\sigma_h = 40$ kg/cm² y $\sigma_f = 1\,200$ kg/cm² se obtiene s = 0,333.

La fuerza interior de compresión recogida por el hormigón es

$$(4A)\quad C_h = \frac{\sigma_h x}{2} a - \sigma_h \frac{x-h}{x} \cdot \frac{x-h}{2} (a-a_o) = \frac{\sigma_h}{2x}\left[a x^2 - (a-a_o)(x-h)^2\right]$$

La situación del punto de aplicación de la fuerza interior de compresión recogida por el hormigón se obtiene de la ecuación,

$$y\, C_h = a\, \sigma_h \cdot \frac{X}{2} \cdot \frac{2x}{3} - (a-a_o)\, \sigma_h \frac{x-h}{x} \cdot \frac{x-h}{2} \cdot \frac{2(x-h)}{3}$$

Despejando y:

$$(5A)\quad y = \frac{\sigma_h}{3xC_h}\left[ax^3 - (a-a_o)(x-h)^3\right] = \frac{2}{3}\ \frac{a x^3 - (a-a_o)(x-h)^3}{a x^2 - (a-a_o)(x-h)^2}$$

Los momentos de las fuerzas exteriores deben ser iguales a los de las fuerzas interiores en cada punto de la sección transversal.

Luego:

$$\begin{cases} M_f' = T_f (d-d') - C_h (x-y-d') \\ M_f = C_f (d-d') + C_h (d-x+y) \end{cases}$$

Pero, como, $T_f = S_f' \sigma_f$ y $C_f = S'^f \sigma_f'$, resulta

$$(6A)\quad \begin{cases} S_f' = \dfrac{M_f' + C_h (x-y-d')}{\sigma_f (d-d')} \\[2ex] S_f' = \dfrac{M_f - C_h (d-x+y)}{\sigma_f' (d-d')} \end{cases}$$

Como las fuerzas axiales exteriores deben ser iguales a las interiores, resulta

$$N = C_h + C_f - T_f$$

Como verificación se obtiene:

$$(7A)\quad S_f = \frac{C_h + S_f' \sigma_f' - N}{\sigma_f}$$

La longitud Z del brazo de las fuerzas interiores, que se necesita para la determinación de las tensiones tangenciales, se obtiene de la ecuación de momentos de las fuerzas interiores respecto al centro de la sección transversal de la armadura de tracción,

$$(C_f + C_h)\ Z = C_f\ (d - d') + C_h\ (d - x + y) = M_f$$

luego:

$$\text{(8A)} \quad Z = \frac{M_f}{S_f' \cdot \sigma_f' + C_h}$$

B) No se toman en consideración las tensiones de compresión recogidas por el nervio (véase fig. 3).

(2B) $x = \ldots$ [Queda dado pará la fórmula (2A) y arroja el mismo valor]

(3B) $\sigma_f' = \ldots$ [Queda dado por la fórmula (3A) y arroja el mismo valor]

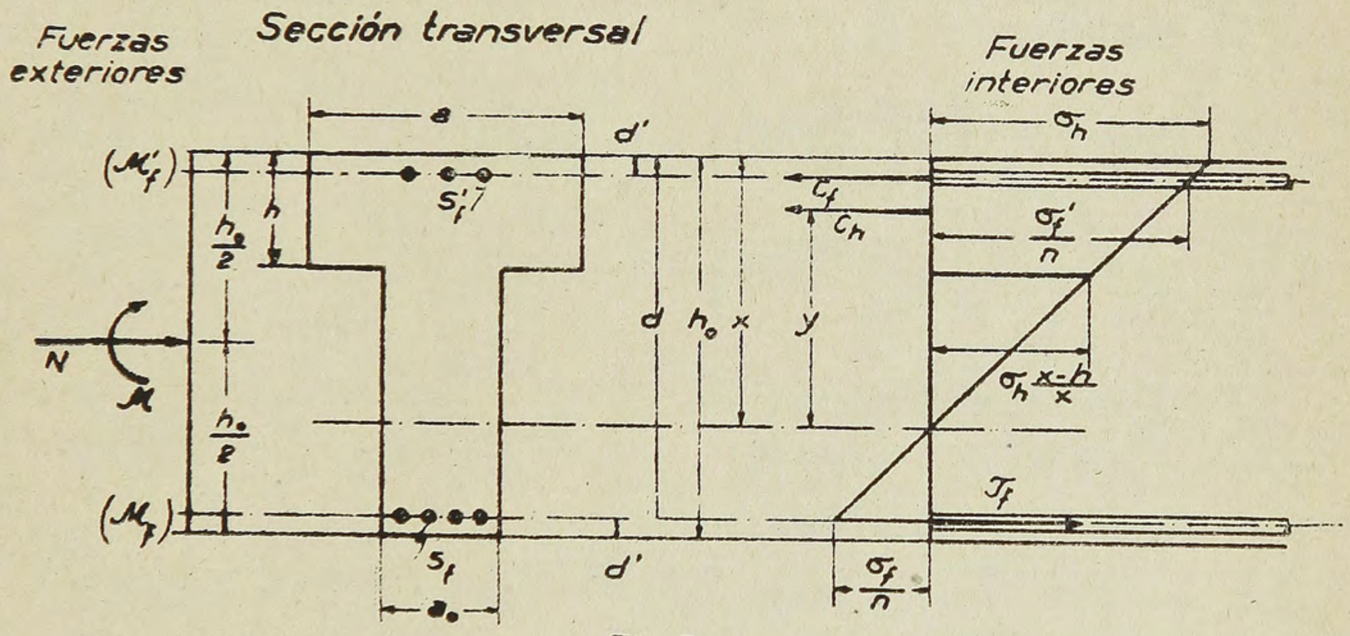

Fig. 3

La fuerza interior de compresión recogida por el hormigón es:

$$\text{(4B)} \quad C_h = \left(\sigma_h + \sigma_h \frac{x - h}{x}\right) \frac{h}{2}\ a = \frac{\sigma_h\ h\ a}{2\,x}\ (2\,x - h)$$

La situación del punto de aplicación de la fuerza interior de compresión recogida por el hormigón se obtiene de la ecuación,

$$Y\ C_h = a \left[\sigma_h \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2\,x}{3} - \sigma_h \frac{x - h}{x} \cdot \frac{x - h}{2} \cdot \frac{2\,(x - h)}{3} \right]$$

luego

(5B) $y = \frac{a\,\sigma_h}{3\,x\,C_h}\,[x^3 - (x - h)^3] = \frac{2}{3\,h} \cdot \frac{x^3 - (x - h)^3}{2\,x - h} = x - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6\,(2x - h)}$

(6B) $\begin{cases} S_f = \ldots \\ S'_f = \ldots \end{cases}$ [Quedan dados por las fórmulas (6A)]

(7B) $S_f = \ldots$ [Queda dado por la fórmula (7A)]

(8B) $Z = \ldots$ [Queda dado por la fórmula (8A)]

Ejemplo:

Sean dados:

a) $M = 388{,}0$ tm, $N = 67{,}3$ t

b) $a = 1{,}63$ m, $a_o = 0{,}50$ m, $h = 0{,}15$ m, $h_o = 1{,}82$ m, $d = 1.77$ m, $d' = 0{,}05$ m

c) $\sigma_h = 750$ t/m², (*) $\sigma_f = 12\,000$ t/m²

De las ecuaciones (1) se obtiene:

$$\begin{cases} M_f' = 388.0 - 67{,}3\left(\frac{1{,}82}{2} - 0{,}05\right) = 330{,}0 \text{ tm} \\ M_f = 388{,}0 + 67{,}3\left(\frac{1{,}82}{2} - 0{,}05\right) = 446{,}0 \text{ tm} \end{cases}$$

En el caso A) se obtiene:

de (2A) $x = 0{,}484 \cdot 1{,}77 = 0{,}857$ m

de (3A) $\sigma'_f = 12\,000\,\frac{0{,}857 - 0{,}05}{1{,}77 - 0{,}857} = 10\,610$ t/m²

de (4A) $C_h = \frac{750}{2 \cdot 0{,}857}\,[1{,}63 \cdot 0{,}857^2 - 1{,}13 \cdot 0{,}707^2] = 276{,}0$ t

de (5A) $y = \frac{2}{3}\;\frac{1{,}63 \cdot 0{,}857^3 - 1{,}13 \cdot 0{,}707^3}{1{,}63 \cdot 0{,}857^2 - 1{,}13 \cdot 0{,}707^2} = 0{,}660$ m

de (6A) $$\left.\begin{cases} S_f = \dfrac{330 + 276 \cdot 0{,}147}{12000 \cdot 1{,}72} = 0{,}01794 \text{ m}^2 \\ S'_f = \dfrac{446 - 276 \cdot 1{,}573}{10\,610 \cdot 1{,}72} = 0{,}00061 \text{ m}^2 \end{cases}\right\}\; 0{,}01855 \text{ m}^2$$

(*) El ejemplo presentado se ha tomado de un cálculo de resistencia del autor para un puente carretero en Alemania, ejecutado con cemento de alta calidad.

de (7A) $$S_f = \frac{276 + 0{,}00061 \cdot 10\,610 - 67{,}3}{12\,000} = 0{,}01794 \text{ m}^2$$

de (8A) $$Z = \frac{446}{0{,}00061 \cdot 10\,610 + 276} = 1{,}577 \text{ m}$$

En el caso B) se obtiene:

de (2B) $$x = 0{,}857 \text{ m.}$$

de (3B) $$\sigma'_f = 10\,610 \text{ t/m}^2$$

de (4B) $$C_h = \frac{750 \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}63}{2 \cdot 0{,}857} \,.\, 1{,}564 = 187{,}9 \text{ t}$$

de (5B) $$y = 0{,}857 - \frac{0{,}15}{2} + \frac{0{,}15^2}{6 \cdot 1{,}564} = 0{,}784 \text{ m}$$

de (6B) $$\left.\begin{aligned} S_f &= \frac{330 + 187{,}9 \cdot 0{,}023}{12\,000 \cdot 1{,}72} = 0{,}01620 \text{ m}^2 \\ S'_f &= \frac{446 - 187{,}9 \cdot 1{,}697}{10\,610 \cdot 1{,}72} = 0{,}00698 \text{ m}^2 \end{aligned}\right\} 0{,}02318 \text{ m}^2$$

de (7B) $$S_f = \frac{187{,}9 + 0{,}00698 \cdot 10\,610 - 67{,}3}{12\,000} = 0{,}01620 \text{ m}^2$$

de (8B) $$Z = \frac{446}{0{,}00698 \cdot 10\,610 + 187{,}9} = 1.703 \text{ m}$$

Observación final.—Cuando la segunda de las ecuaciones (6) arroja un valor negativo para S_f' no es necesaria una armadura de compresión y la tensión de compresión efectiva $\bar{\sigma}_h$ será menor que la tensión dada σ_h. Pero también, en este caso, la primera de las ecuaciones (6) y la ecuación (8) arrojan valores exactos para S_f y Z. Las magnitudes efectivas $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{\sigma}_h$ no tienen ninguna importancia práctica, y no es necesario calcularlas.

Se puede considerar las fuerzas calculadas C_f y C_h como fuerzas ficticias que pueden ser reemplazadas por una fuerza efectiva $\bar{C}_h$.