

# Teoría elemental del efecto giroscópico

1) Entre los movimientos de sólidos estudiados en la mecánica racional, los más sorprendentes son aquellos en que interviene el llamado *efecto giroscópico*; en efecto, dichos movimientos presentan un carácter excepcional pues parecen ser regidos por leyes especiales que, a primera vista, aparecen como una excepción a los principios fundamentales de la mecánica.

Todos los textos medianamente completos de mecánica racional estudian el efecto giroscópico como un caso particular del movimiento de un sólido que tiene un punto fijo. Lo hacen a través de las ecuaciones de Euler, las que sólo pueden integrarse mediante el empleo de funciones elípticas; el resultado es que el lector llega a fórmulas de las cuales se pueden deducir las propiedades del movimiento, pero no consigue visualizar en forma clara el por qué de estos resultados.

Por esta razón, en mi curso de Mecánica Racional, he preferido tratar este problema en una forma más elemental que, aunque más larga, permite a los alumnos entender mejor el juego de las fuerzas que causan el movimiento. En dicho curso se hace un uso extensivo de los métodos vectoriales que simplifican mucho las demostraciones y acortan considerablemente la exposición, fuera de evitar la descomposición artificiosa de las fuerzas y otros elementos dirigidos en sus componentes cartesianas.

En atención a que el álgebra vectorial no ha tenido hasta ahora entre los ingenieros la difusión que merece, conservaré solamente la notación vectorial para la presente exposición, y me limitaré al empleo de los teoremas más elementales del cálculo vectorial. Para mayor facilidad del lector indico a continuación un resumen de las definiciones y fórmulas que serán utilizadas en este estudio.

## 2) NOTACIÓN VECTORIAL.

Una cantidad física que tiene magnitud, dirección y sentido será representada por una sola letra,  $\vec{a}$ ; sin embargo, podemos evidenciar las componentes de esta magnitud según tres direcciones rectangulares en virtud de la relación

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$



en que  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  son tres vectores unitarios que definen las direcciones de los ejes  $ox, oy, oz$ .

Definiremos otros dos vectores:

$$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}; \quad \vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$$

*Producto escalar de los vectores:* es, por definición, el producto de las magnitudes de los vectores, multiplicando por el coseno del ángulo de sus direcciones.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

*Producto vectorial de dos vectores:* es un vector normal al plano de los dos vectores y cuya magnitud es el producto de las magnitudes de los factores por el seno del ángulo de sus direcciones.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

Se puede escribir también

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Se verifica inmediatamente que el producto vectorial de dos vectores paralelos es idénticamente nulo.

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

Se tiene además las relaciones siguientes entre los vectores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad ; \quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad ; \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

El producto vectorial no es conmutativo; en efecto

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$



*Producto mixto o escalar de 3 vectores:* es el resultado de multiplicar escalarmen-  
te el producto vectorial de dos vectores por un tercero. Se tiene:

$$[a b c] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Este producto representa el volumen del paralelepípedo construido con 3 vecto-  
res  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  aplicados en un mismo punto. Se tiene además

$$[a b c] = [b c a] = [c a b] = -[b a c] = -[a c b] = -[c b a] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Se deduce inmediatamente que es idénticamente nulo si: a) dos de los vectores son paralelos; y b) si los tres vectores están en un mismo plano.

*Triple producto vectorial.*—Es el resultado de la multiplicación vectorial de un producto vectorial por otro vector. Se tiene la fórmula fundamental:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{c} \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} \vec{a}$$

Por consiguiente, es indispensable colocar paréntesis para indicar el orden en que se efectúan los productos.

*Momento de una fuerza:* Si  $\vec{OA} = \vec{a}$  es el vector que va del origen a un punto cualquiera de la línea de acción o soporte de una fuerza  $\vec{F}$ , el momento de esta fuerza respecto de 0 es:

$$\vec{m} = \vec{a} \times \vec{F}$$

*Velocidad en un Movimiento de Rotación.*—Si un sólido tiene un movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el origen, se puede representar este movimiento por un vector  $\omega$  cuya magnitud es igual a la velocidad angular  $\omega$  y cuya dirección es la del eje. La velocidad de un punto P, definido por el vector  $\vec{OP} = \vec{r}$  es entonces:

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r}$$

*Aceleración en un Movimiento de Rotación.*—La aceleración del punto P se obtendrá por derivación de la relación anterior respecto del tiempo



$$\vec{J} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Pero

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Luego

$$\vec{J} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \vec{r} \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}$$

ya que

$$\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = |\omega| |\omega| = \omega^2$$

### 3) TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA.

Vamos a recordar brevemente los teoremas que vamos a necesitar para este estudio.

Consideremos un elemento material perteneciente a un sistema material y cuya posición queda definida por el vector  $\vec{OP} = \vec{r}$ ; sean  $\vec{J}$  la aceleración y  $dm$  la masa de este elemento situado en  $P$ . Las fuerzas que actúan sobre este elemento son de dos clases: a) *las fuerzas interiores*, que representan las acciones de los demás elementos del sistema sobre  $P$ ; como todas pasan por el punto  $P$ , pueden ser reemplazadas por su resultante  $\vec{F}_i$ ; b) *las fuerzas exteriores*, que representan las acciones provenientes de elementos ajenos al sistema y que equivalen a una resultante  $\vec{F}_e$ .

La ecuación del movimiento de  $P$  es:

$$\vec{J} dm = \vec{F}_e + \vec{F}_i \quad (1)$$

Si escribimos las ecuaciones del movimiento de cada una de las partículas del sistema y las sumamos, obtenemos:

$$\int \vec{J} dm = \Sigma \vec{F}_e = \vec{R} \quad (2)$$

En efecto, en virtud del principio de la igualdad de la acción y la reacción, el conjunto de las fuerzas  $\vec{F}_i$  está en equilibrio, pues se compone de pares de fuerzas iguales y opuestas. Por lo tanto  $\Sigma \vec{F}_i = 0$

Para tener los momentos de las fuerzas respecto del origen  $O$  basta con multiplicar ambos miembros de (1) por  $\vec{r} \times$ ; se obtiene



$$\vec{r} \times \vec{J} \, dm = \vec{r} \times \vec{F}_i + \vec{r} \times \vec{F}_e$$

y sumando todas las ecuaciones análogas relativas a los diferentes elementos del sistema

$$\int \vec{r} \times \vec{J} \, dm = \Sigma (\vec{r} \times \vec{F}_e) = \vec{m} \quad (3)$$

ya que, por la razón dada de ser  $\Sigma \vec{F}_i$  un sistema de fuerzas en equilibrio, su momento respecto de cualquier punto es nulo; es decir,  $\Sigma (\vec{r} \times \vec{F}_i) = 0$

#### 4) TEOREMAS DE RESAL,

Las relaciones (2) y (3) pueden ser expresadas de otra manera; en efecto, se tiene:

$$\vec{J} \, dm = \frac{d\vec{v}}{dt} \, dm = \frac{d}{dt} (\vec{v} \, dm)$$

por consiguiente

$$\int \vec{J} \, dm = \frac{d}{dt} \int \vec{v} \, dm$$

Del mismo modo

$$\vec{r} \times \vec{J} \, dm = \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \, dm = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v} \, dm)$$

en efecto,

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v} \, dm) = \vec{v} \times \vec{v} \, dm + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \, dm = \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \, dm$$

Por lo tanto

$$\int \vec{r} \times \vec{J} \, dm = \frac{d}{dt} \int \vec{r} \times \vec{v} \, dm$$

Ahora bien,  $\vec{v} \, dm$  es por definición el *impulso* (o cantidad de movimiento) de la partícula considerada;  $\vec{r} \times \vec{v} \, dm$  es entonces el momento del impulso de dicha partícula respecto de O. Si definimos los vectores:



Impulso:

$$\mathfrak{I} = \int \vec{v} \, dm$$

y

Momento cinético:

$$\vec{G} = \int \vec{r} \times \vec{v} \, dm$$

las relaciones (3) y (4) se escriben

$$\frac{d\vec{\mathfrak{I}}}{dt} = \vec{R} \quad (4)$$

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{m} \quad (5)$$

Las relaciones (4) y (5) son la expresión de los Teoremas de Résal, que pueden enunciarse como sigue, en el entendido de que los vectores  $\vec{\mathfrak{I}}$  y  $\vec{G}$  se trazan a partir del origen O.

*Teorema del impulso.*—La velocidad del extremo del vector impulso es, en cada instante, igual a la resultante de las fuerzas exteriores.

*Teorema del Momento Cinético.*—La velocidad del extremo del vector momento cinético es, en todo momento, igual al vector momento de las fuerzas exteriores respecto del origen.

Debe tenerse presente que estos teoremas traducen ecuaciones vectoriales; por consiguiente las igualdades a que se refieren son en magnitud, dirección y sentido.

## 5) MOVIMIENTO RELATIVO

En algunos casos resultará más cómodo utilizar un sistema de referencia móvil  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ; entonces los vectores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  que definen las direcciones de los ejes de referencia serán constantes en magnitud pero variables en dirección. Esta movilidad del sistema de referencia no afecta la descomposición de un vector en sus componentes según los ejes; en cambio, modifica la expresión de sus derivadas.

En efecto, consideremos un punto P definido en el sistema móvil por el vector  $\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . Para un observador ligado al sistema de referencia, la velocidad de P será:

$$\vec{v}_r = \vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

en que

$$x' = \frac{dx}{dt}; \quad y' = \frac{dy}{dt}; \quad z' = \frac{dz}{dt}$$



En cambio, para un observador fijo, la velocidad  $\vec{v}$  de P será la resultante de la velocidad relativa  $\vec{v}_r$ , y de la velocidad  $\vec{v}_a$  que tiene el punto del sistema en referencia que coincide con P en el instante considerado. Este punto se llama *punto coincidente* y su velocidad, *velocidad de arrastre*.

Por consiguiente la velocidad de P medida por el observador fijo o velocidad absoluta  $\vec{v}$  es

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_a$$

Esta relación, según la cual la velocidad absoluta es la suma vectorial de las velocidades relativa y de arrastre, se conoce con el nombre de *Teorema de Roberval*.

En el caso particular en que el movimiento del sistema de referencia se reduce a una rotación  $\vec{\omega}$  alrededor de un eje que pasa por el origen, la velocidad de arrastre será

$$\vec{v}_a = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

y el teorema de Roberval nos da

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Consideremos ahora un vector cualquiera  $\vec{u} = \vec{OM}$  que varía con el tiempo; sus componentes según los ejes móviles nos son dadas por

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$$

Su derivada será igual a la velocidad absoluta de su extremo, es decir

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{u}' + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

siendo  $\vec{u}' = u_1' \vec{i} + u_2' \vec{j} + u_3' \vec{k}$

la rapidez de variación de  $\vec{u}$  observada por el observador ligado al sistema.

Por consiguiente, en el caso de un sistema de referencia móvil pero cuyo origen es fijo se tiene la relación operatoria siguiente:

$$\frac{d}{dt} ( \ ) = ( \ )' + \vec{\omega} \times ( \ ) \quad (6)$$



## 6) TEOREMA DE CORIOLIS

Consideremos un móvil P que tiene la velocidad  $\vec{v}_r$  y la aceleración  $\vec{J}_r$  respecto de un sistema de referencia que tiene un movimiento cualquiera. La cinemática nos enseña que el movimiento más general de un sólido puede, en cada instante, descomponerse en una traslación y una rotación. Esta descomposición se puede efectuar de infinitas maneras, pero en todas ellas la magnitud y dirección de la rotación es la misma; lo que cambia es el soporte (eje) de la rotación y la traslación.

Podemos entonces descomponer el movimiento del sólido de referencia en una traslación  $\vec{v}_a$ , igual a la velocidad del punto coincidente y una rotación  $\omega$  cuyo soporte pasa por dicho punto.

En el instante inicial, la velocidad P será

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_a$$

Durante el intervalo  $dt$  siguiente esta velocidad va a experimentar los siguientes incrementos (despreciando los términos de orden superior)

La velocidad relativa  $\vec{v}_r$  va a cambiar por dos razones:

a) Por la acción de la aceleración relativa  $\vec{J}_r$

$$d\vec{v}_1 = \vec{J}_r dt$$

b) Por la rotación del sistema de referencia, la que altera la dirección de  $\vec{v}_r$  desplazando su extremo en la cantidad

$$d\vec{v}_2 = \omega \times \vec{v}_r dt$$

A su vez, la velocidad de arrastre  $\vec{v}_a$  es modificada por dos causas:

c) Por la acción de la aceleración de arrastre

$$d\vec{v}_3 = \vec{J}_a dt$$

d) Por el desplazamiento relativo de P que, en el instante  $dt$ , se encuentra en P'. Este desplazamiento  $\vec{PP}' = \vec{v}_r dt$  ha alejado al punto del eje de rotación, de manera que la velocidad de arrastre en P' excede la de P en la cantidad

$$d\vec{v}_4 = \omega \times \vec{v}_r dt$$

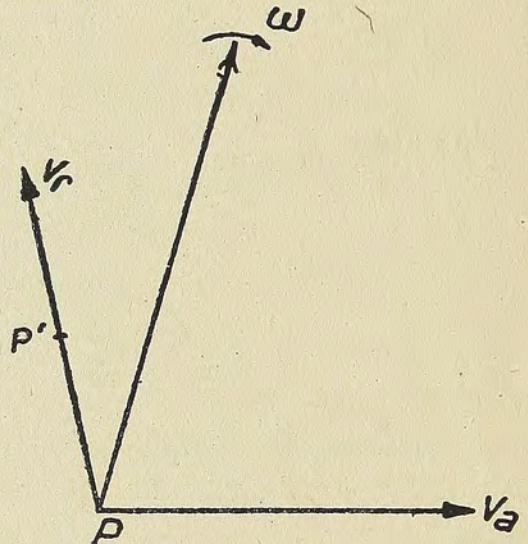


Fig. 1



La aceleración absoluta de P será evidentemente igual a la suma de estos incrementos dividida por  $dt$ . Se obtiene

$$\vec{J} = \vec{J}_r + \vec{J}_a + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \quad (7)$$

Por lo tanto:

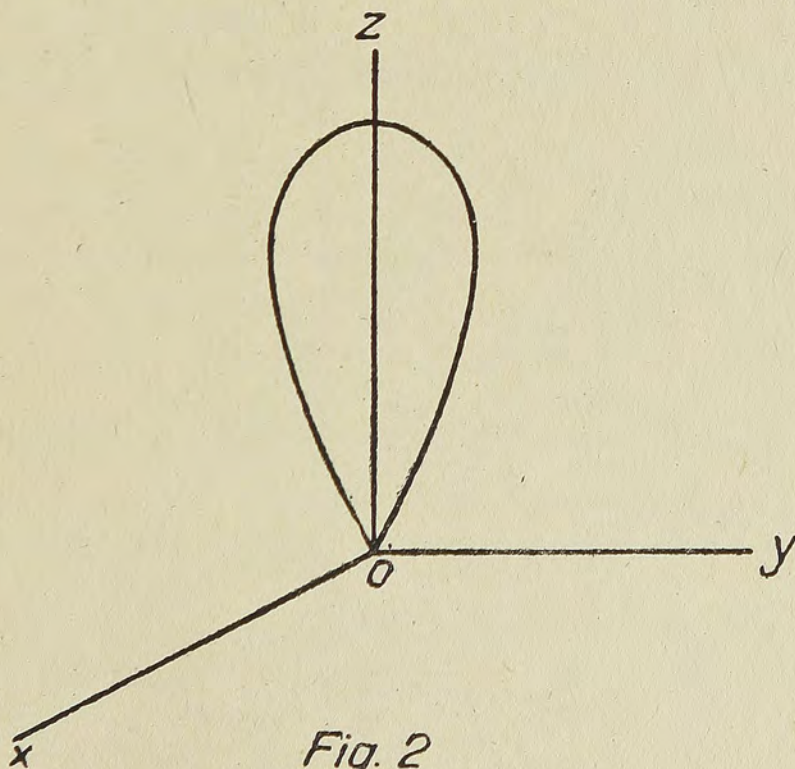
*Teorema de Coriolis.*—La aceleración absoluta es igual a la suma vectorial de las aceleraciones relativa y de arrastre, más a un término llamado *aceleración complementaria o de Coriolis* cuyo valor es  $\vec{J}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ .

La demostración que precede y que no he encontrado en ningún texto de Mecánica, me parece más clara que las que se dan generalmente. Además tiene la ventaja de evidenciar que la aceleración complementaria  $\vec{J}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$  proviene por partes iguales del cambio de dirección de  $\vec{v}_r$  y del alejamiento del móvil respecto del eje instantáneo de rotación.

## 7) DEFINICIÓN DEL EFECTO GIROSCÓPICO

Consideremos un sólido de revolución homogéneo, cuyo eje de figura coincide con  $oz$  y cuyo punto  $O$  es fijo.

Designemos por  $A$  su momento de inercia respecto de cualquier eje trazado por  $O$  en el plano  $xOy$  y por  $C$  su momento de inercia respecto de  $oz$ .



Debido a la simetría del sólido, el eje  $oz$  y cualquier par de ejes rectangulares  $ox$ ,  $oy$  del plano  $xoy$  serán principales de inercia.

Estando en reposo el sólido y el sistema de referencia, apliquémosles un mo-



mento  $\vec{m} = m \vec{i}$ ; el sistema adquirirá una rotación  $\vec{\omega}$  alrededor del eje fijo  $ox$ , definida por

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{m}{A} \vec{i}$$

En efecto, partamos de la relación (3)

$$\int \vec{r} \times \vec{J} \, dm = m \vec{i}$$

y multipliquémosla por el vector constante  $\vec{i}$ , se obtiene

$$\int [r J i] \, dm = m$$

Ahora bien, hemos demostrado que

$$\vec{J} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \vec{r} \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{r} \times \vec{J} = r^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \vec{r} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \vec{r} \vec{r} \times \vec{\omega}$$

$$[r J i] = r^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{i} - \vec{r} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r} \cdot \vec{i} + \vec{\omega} \cdot \vec{r} [r \omega i]$$

Por otra parte,  $\vec{\omega}$  y  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$  tienen la dirección  $\vec{i}$ , luego

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{i} = \frac{d\omega}{dt}; \quad \vec{r} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = x \frac{d\omega}{dt}; \quad \vec{r} \cdot \vec{i} = x; \quad \vec{\omega} \cdot \vec{r} = \omega x; \quad [r \omega i] = 0$$

luego

$$\int [r J i] \, dm = \frac{d\omega}{dt} \int r^2 \, dm - \frac{d\omega}{dt} \int x^2 \, dm = \frac{d\omega}{dt} \int (x^2 + y^2 + z^2 - x^2) \, dm$$

Pero

$$\int (y^2 + z^2) \, dm = A$$

Finalmente

$$A \frac{d\omega}{dt} = m$$



o, multiplicando ambos miembros por  $\frac{\vec{i}}{A}$ .

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\vec{m}}{A} \quad (I)$$

que es la ecuación fundamental del movimiento de rotación de un sólido alrededor de un eje.

8) Supongamos ahora que, en el instante inicial, el sólido gire con la velocidad  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$  alrededor de oz que está inmóvil. Si entonces aplicamos a oz un momento  $m \vec{i}$  dirigido según ox, éste no alterará la velocidad angular  $\Omega$  pero sí la orientación del sistema de referencia cuyo origen es fijo. En efecto, se observa que este sistema adquiere un movimiento que, si  $\Omega$  es muy grande, se puede asimilar en primera aproximación a una rotación alrededor de oy definida por

$$\vec{\omega} = \frac{m}{C\Omega} \vec{k} \times \vec{i} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{m}}{C\Omega^2} \quad (II)$$

Se ve que, contrariamente al caso anterior,  $\vec{\omega}$  tiene una magnitud constante y la rotación se efectúa alrededor de oy en vez de ox. Además, si en la ecuación (II) hacemos  $\Omega=0$ , no encontramos la ecuación (I) que, sin embargo, es la que rige el movimiento.

Este movimiento anormal del eje de figura oz del sólido, definido por la relación (II) constituye el *efecto giroscópico*. La incompatibilidad señalada de las ecuaciones (I) y (II) confirma lo dicho más arriba; a saber: los movimientos en que interviene el efecto giroscópico parecen ser regidos por leyes especiales, incompatibles con las que rigen los movimientos normales, lo que es evidentemente inadmisibles.

El movimiento definido por (II) es explicado en forma muy sencilla en algunos textos de mecánica mediante el razonamiento que sigue.

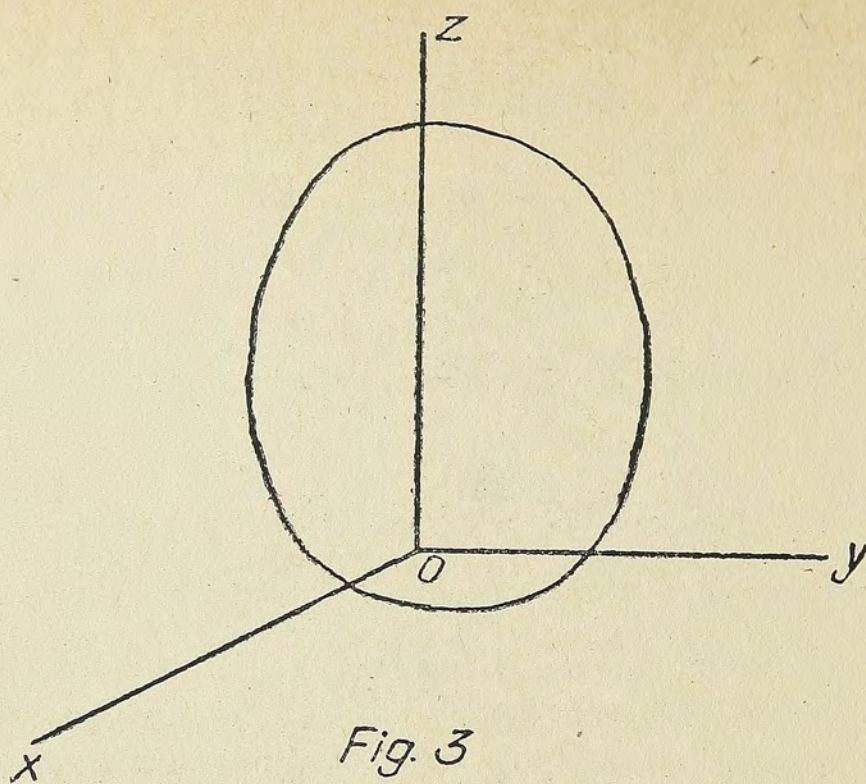
Consideremos un sólido cualquiera cuyo punto o es fijo, y un sistema rectangular oxyz ligado al sólido.

El movimiento del sólido puede ser representado en cada instante por una rotación

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}$$

cuyo eje pasa por o.





Calculemos el momento cinético del sólido en el instante considerado. Se tiene

$$\vec{G} = \int \vec{r} \times \vec{v} \, dm = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \, dm$$

Si desarrollamos esta expresión después de reemplazar  $\omega$  y  $r$  por sus expresiones en función de  $i, j, k$  se obtiene, después de hechas las reducciones,

$$\begin{aligned} \vec{G} = & [\omega_1 \int (y^2 + z^2) \, dm - \omega_2 \int xy \, dm - \omega_3 \int zx \, dm] \vec{i} + \\ & + [\omega_2 \int (z^2 + x^2) \, dm - \omega_3 \int yz \, dm - \omega_1 \int xy \, dm] \vec{j} + \\ & + [\omega_3 \int (x^2 + y^2) \, dm - \omega_1 \int zx \, dm - \omega_2 \int yz \, dm] \vec{k}. \end{aligned}$$

Si el sistema  $oxyz$  se ha elegido de manera que sus ejes coincidan con las direcciones principales en  $O$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int (y^2 + z^2) \, dm = A; \quad \int (z^2 + x^2) \, dm = B; \quad \int (x^2 + y^2) \, dm = C \\ \int xy \, dm = \int yz \, dm = \int yx \, dm = 0 \end{aligned}$$

y la expresión de  $\vec{G}$  se reduce a

$$\vec{G} = A\omega_1 \vec{i} + B\omega_2 \vec{j} + C\omega_3 \vec{k} \quad (8)$$

Si suponemos  $\omega_3 = \Omega$  muy grande comparado con  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , podemos escribir aproximadamente

$$\vec{G} = C\Omega \vec{k}$$

El segundo teorema de Résal (5) se escribe entonces



$$\frac{d\vec{G}}{dt} = C\Omega \vec{k}' = m \vec{i}.$$

o sea

$$\vec{k}' = \frac{m}{C\Omega} \vec{i}$$

Por consiguiente, el movimiento de oz es una rotación alrededor de oy representada por

$$\vec{\omega} = \frac{m}{C\Omega} \vec{j}$$

fórmula equivalente a (II)

Esta explicación tiene el mérito de su sencillez pero, a mi juicio, es poco satisfactoria porque no indica las causas de este movimiento. ¿Por qué no obedece el sólido a la sollicitación del momento en conformidad a la ecuación (I)? ¡Misterio! Por otra parte, esta explicación prescinde de las componentes  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de la rotación, cuyos efectos pueden acumularse con el tiempo.

A mi juicio, la consideración de las *Fuerzas de Inercia* suministra una explicación mucho más completa y satisfactoria. La ecuación fundamental (2) puede escribirse

$$\Sigma \vec{F}_e + \int -\vec{J} dm = 0$$

Por consiguiente, si consideramos las cantidades  $-\vec{J} dm$  como fuerzas aparentes y las llamamos fuerzas de inercia, la relación anterior nos conduce al siguiente enunciado:

En el movimiento de un sistema material hay, en todo momento, equilibrio entre las fuerzas exteriores y las fuerzas de inercia. Este enunciado es el *Principio d'Alembert*.

Vamos a justificar este concepto de fuerzas de inercia por medio de un ejemplo sencillo. Consideremos un punto material P, de masa m y cuya posición en un sistema de referencia móvil esta definida por el vector  $\vec{r}$ ; supondremos que el punto P no está sometido a la acción de fuerza alguna y por lo tanto su aceleración es también nula. En cambio el punto del sistema de referencia que coincide con P tiene una aceleración  $\vec{J}$  como consecuencia del movimiento del sistema; por consiguiente el punto P tendrá, para un observador ligado al sistema de referencia, una aceleración

$$\vec{r}'' = -\vec{J}$$

y para dicho observador, todo sucede como si el punto P estuviera sometido a una fuerza igual a  $-\vec{J} dm$ , es decir a la fuerza de inercia definida más arriba.



La consideración de las fuerzas de inercia nos va a permitir explicar el efecto giroscópico.

Consideremos un sistema  $Ox$  y  $z$  de origen fijo y cuyos ejes  $Oy$ ,  $Oz$  giran en el plano de la figura con la velocidad angular  $\vec{\omega} = \omega \vec{i}$ . Un disco circular homogéneo, cuyo centro de gravedad coincide con  $O$ , tiene respecto del sistema  $Ox$  y  $z$  un movimiento de rotación  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$  alrededor de  $Oz$ .

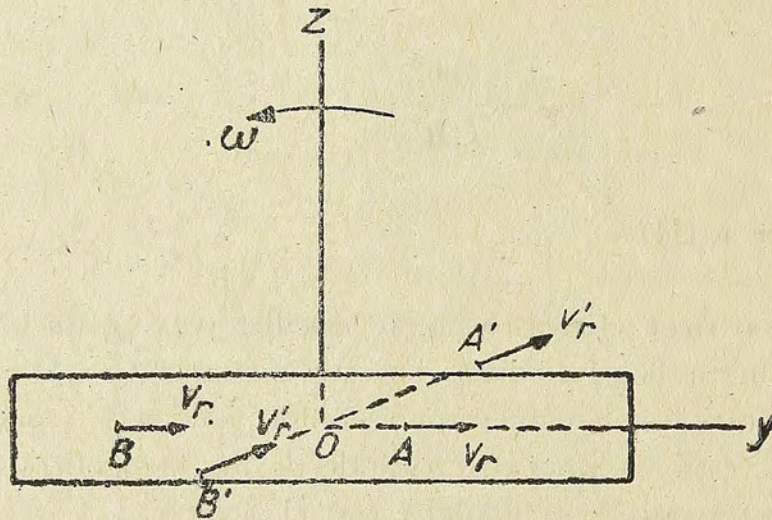


Fig. 4

Un punto como  $A$ , situado delante del plano  $yOz$  y cuya velocidad respecto del sistema en referencia es  $\vec{v}_r = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ , se encontraría, después del tiempo  $dt$ , en el punto  $A'$  con la velocidad  $\vec{v}'_r$  si el disco obedeciera a la rotación del sistema,

El cambio de dirección de  $\vec{v}_r$  corresponde a una aceleración dirigida según  $\vec{k}$  e igual a  $\vec{\omega} \times \vec{v}_r = \omega \Omega \vec{i} \times (\vec{k} \times \vec{r}) = \Omega \vec{i} \cdot r \vec{k}$ . Simultáneamente la velocidad de arrastre, dirigida según  $\vec{k}$ , ha aumentado de  $A$  a  $A'$  puesto que el punto se ha alejado de  $Ox$ ; esto también corresponde a una aceleración dirigida según  $\vec{k}$  e igual a la anterior, según hemos visto en el párrafo (6),

Del mismo modo, un punto  $B$ , al pasar en  $B'$ , tiene que desviar hacia arriba su velocidad relativa; simultáneamente, su velocidad de arrastre dirigida hacia abajo disminuye, ya que el punto se acerca a  $Ox$ . Ambas cosas exigen aceleraciones dirigidas según  $\vec{k}$ ,

Se deduce que, al tener el disco un movimiento resultante de las rotaciones  $\vec{\Omega}$  y  $\vec{\omega}$ , todos sus puntos situados delante de  $yOz$  tendrán aceleraciones de dirección  $\vec{k}$ ; en cambio, un razonamiento análogo nos indica que todos los puntos situados detrás de  $yOz$  tendrían aceleraciones dirigidas según  $-\vec{k}$ .

Estas aceleraciones corresponden a fuerzas de inercia dirigidas hacia abajo



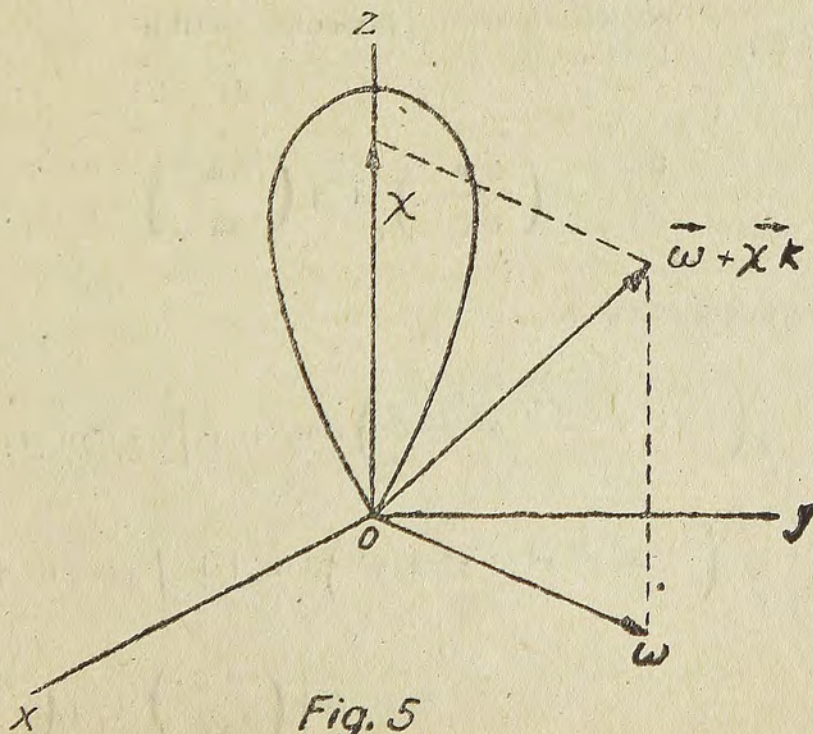
( $-k$ ) para los puntos situados delante de  $y Oz$ , y de dirección contraria para los otros. Dada la simetría del disco respecto de  $y Oz$ , estas fuerzas equivaldrían a un par o momento  $m_c \vec{j}$  y si no existe un par de fuerzas exteriores que lo compense, el disco tendrá que girar alrededor del eje móvil  $O$  y de manera que  $Oz$  se acerque al lector.

Este ejemplo, aunque incompleto, nos dice que el efecto giroscópico debe tener su explicación en las fuerzas de inercia; por consiguiente conviene que determinemos su influencia en un caso más general.

9) Consideremos (Fig. 5) un sólido de revolución cuyo punto  $O$  es fijo y que gira con la velocidad angular  $\Omega$  alrededor de su eje de figura. Tomemos un sistema rectangular de ejes de referencia sometido a las siguientes condiciones: su origen coincide con el punto fijo  $O$  y su eje  $Oz$  coincide en todo momento con el eje de revolución del sólido. El movimiento más general del sistema de referencia será una rotación alrededor de un eje que pasa por  $O$  y el vector representativo de esta rotación podrá descomponerse en una rotación  $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j}$  situada en el plano  $xOy$ , y una rotación  $\chi \vec{k}$  según  $Oz$ . Esta última no se transmite al sólido, ya que suponemos que éste gira libremente alrededor del eje  $Oz$ . Por consiguiente, el movimiento instantáneo absoluto del sólido será una rotación  $\Omega$  alrededor del eje  $Oz$  cuyo movimiento es la rotación  $\vec{\omega}$ . En cambio, el movimiento del sistema de referencia en el mismo instante será la rotación  $\vec{\omega} + \chi \vec{k}$ .

Calculemos los valores del momento de las fuerzas de inercia que se producen en el sólido en un instante dado. La aceleración de un punto definido por el vector  $\vec{r}$  será:

$$\vec{J} = \vec{J}_r + \vec{J}_a + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r$$





Calculemos sucesivamente los momentos correspondientes a cada uno de los términos del segundo miembro.

La expresión de la aceleración relativa es:

$$\vec{J}_r = \Omega \vec{k} \times (\Omega \vec{k} \times \vec{r}) = \Omega^2 (\vec{k} \cdot \vec{r} \vec{k} - \vec{r})$$

luego

$$\vec{m}_r = \int -\vec{r} \times \vec{J}_r \, dm = \Omega^2 \int \vec{k} \cdot \vec{r} \vec{k} \times \vec{r} \, dm = \Omega^2 \int z (x \vec{j} - y \vec{i}) \, dm$$

Como todos los productos de inercia son todos nulos, se obtiene

$$\vec{m}_r = 0 \quad (9)$$

La aceleración de arrastre tiene por expresión

$$\vec{J}_a = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

luego

$$\begin{aligned} \vec{m}_a = \int -\vec{r} \times \vec{J}_a \, dm = & -\frac{d\vec{\omega}}{dt} r^2 \, dm + \int \vec{r} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r} \, dm + \\ & + \int \vec{\omega} \cdot \vec{r} \vec{\omega} \times \vec{r} \, dm \end{aligned}$$

Como el vector  $\vec{\omega}$  se encuentra siempre en el plano x O y, debe suceder lo mismo con el vector  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ; por consiguiente, podemos escribir

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_1 \vec{i} + \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_2 \vec{j}$$

y las dos primeras integrales valen

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_1 \left[ \vec{i} \int (-x^2 - y^2 - z^2 + x^2) \, dm + \vec{j} \int x y \, dm + \vec{k} \int x z \, dm \right] + \\ & + \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_2 \left[ \vec{j} \int (-x^2 - y^2 - z^2 + y^2) \, dm + \vec{k} \int y z \, dm + \vec{i} \int x y \, dm \right] \\ & = -A \left[ \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_1 \vec{i} + \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_2 \vec{j} \right] \end{aligned}$$



ya que

$$A = \int (y^2 + z^2) dm = \int (z^2 + x^2) dm; \int x y dm = \int y z dm = \int z x dm = 0$$

En cuanto a la tercera integral, su valor es:

$$\int (\omega_1 x + \omega_2 y) (\omega_1 y \vec{k} + \omega_2 z \vec{i} - \omega_1 z \vec{j} - \omega_2 x \vec{k}) dm = \omega_1 \omega_2 \left[ \vec{k} \int y^2 dm - \vec{k} \int x^2 dm \right] = 0$$

ya que  $\int x^2 dm = \int y^2 dm$  por ser de revolución el sólido. Por consiguiente

$$\vec{m}_a = -A \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (10)$$

expresión equivalente a la ecuación (I).

Calculemos ahora el momento de las fuerzas de inercia correspondiente a las aceleraciones complementarias.

$$\vec{J}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2\vec{\omega} \times (\Omega \vec{k} \times \vec{r}) = 2\Omega (\vec{\omega} \cdot \vec{r} \vec{k} - \vec{\omega} \cdot \vec{k} \vec{r})$$

pero  $\vec{\omega} \cdot \vec{k} = 0$ , luego

$$\vec{J}_c = 2\Omega \vec{\omega} \cdot \vec{r} \vec{k}$$

y el momento buscado será:

$$\vec{m}_c = \int -\vec{r} \times \vec{J}_c = 2\Omega \int \vec{\omega} \cdot \vec{r} \vec{k} \times \vec{r} dm$$

y expresando  $\vec{\omega}$  y  $\vec{r}$  en función de  $i, j, k$

$$\begin{aligned} \vec{m}_c &= 2\Omega \int (\omega_1 x + \omega_2 y) (x \vec{j} - y \vec{i}) dm \\ &= 2\Omega \left[ \omega_1 \vec{j} \int x^2 dm - \omega_1 \vec{i} \int x y dm + \omega_2 \vec{j} \int x y dm - \omega_2 \vec{i} \int y^2 dm \right] \end{aligned}$$

Pero,  $\int x y dm = 0$ ;  $\int x^2 dm = \int y^2 dm = \frac{1}{2} C$

luego

$$\vec{m}_c = \Omega C (\omega_1 \vec{j} - \omega_2 \vec{i}) = \Omega C \vec{k} \times \vec{\omega} \quad (11)$$



10) Con estos cálculos preliminares estamos en condiciones de abordar el problema en forma completa. Consideremos nuevamente el sistema de la figura 5 y supongamos que en el instante inicial el sistema de referencia  $Ox$  y  $z$  está en reposo mientras que el sólido gira alrededor de  $Oz$  con la velocidad  $\Omega$ .

Apliquemos al sistema un momento  $\vec{m} = m \vec{i}$  sometido a las condiciones de tener magnitud constante y una dirección normal a  $Oz$ ; esto deja un grado de libertad a la dirección de este momento, la que fija la del eje  $Ox$ .

En un instante ulterior cualquiera el movimiento del sólido será una rotación  $\Omega$  alrededor de un eje  $Oz$  cuyo movimiento es la rotación  $\vec{\omega}$ ; en cambio, el movimiento del sistema será la rotación  $\vec{\omega} + \chi \vec{k}$  en el caso más general. Por consiguiente nos encontramos en el caso del párrafo anterior y los valores (9), (10) y (11) son válidos

De acuerdo con el principio de d'Alembert, debe tenerse en todo momento igualdad.

$$\vec{m} + \vec{m}_r + \vec{m}_a + \vec{m}_c = 0$$

relación que, con los valores (9), (10) y (11) puede escribirse

$$m \vec{i} + \Omega C \vec{k} \times \vec{\omega} = A \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (12)$$

que es la ecuación del movimiento.

Si comparamos esta ecuación con la relación fundamental (I), vemos que es semejante pero hay que agregar al momento de las fuerzas exteriores  $m \vec{i}$  el de las fuerzas de inercia complementaria  $\Omega C \vec{k} \times \vec{\omega}$ . Esto es natural puesto que estamos usando un sistema de referencia móvil. En efecto, el vector  $\vec{i}$  no es invariable como lo supone la relación (I).

Expresemos  $\vec{\omega}$  y  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$  en función de  $\vec{i}$  y  $\vec{j}$ ; se tiene

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j}$$

y para calcular  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$  disponemos de la ecuación general (6) en la que debemos

reemplazar  $\vec{\omega}$  por  $\vec{\omega} + \chi \vec{k}$  ya que ésta es la rotación del sistema de referencia.

Por lo tanto



$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \omega'_1 \vec{i} + \omega'_2 \vec{j} + (\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \chi \vec{k}) \times (\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j}) \\ &= \omega'_1 \vec{i} + \omega'_2 \vec{j} + \omega_1 \omega_2 \vec{k} - \omega_1 \omega_2 \vec{k} + \chi (\omega_1 \vec{j} - \omega_2 \vec{i}) \\ &= \omega'_1 \vec{i} + \omega'_2 \vec{j} + \chi (\omega_1 \vec{j} - \omega_2 \vec{i}) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\vec{k} \times \vec{\omega} = \omega_1 \vec{j} - \omega_2 \vec{i}$$

Si introducimos estos valores en (12), obtenemos

$$\left[ m - \omega_2 (C\Omega - A\chi) \right] \vec{i} + \omega_1 (C\Omega - A\chi) \vec{j} = A (\omega'_1 \vec{i} + \omega'_2 \vec{j})$$

lo que equivale a las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{A} - n\omega_2 &= \omega'_1 \\ n\omega_1 &= \omega'_2 \\ C\Omega - A\chi &= nA \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

que resuelven el problema.

Antes de integrar estas ecuaciones, trataremos de analizar el movimiento en el caso particular en que  $\chi = 0$ . En el instante inicial  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ; por lo tanto  $\omega'_2 = 0$  y  $\omega'_1 = \frac{m}{A}$ ; esta última relación nos dice que, en el instante inicial, el sólido obedece a la ecuación fundamental (I), como tiene que ser.

Esta aceleración angular  $\omega'_1 \vec{i}$  produce una rotación de magnitud creciente  $\omega_1$  en torno al eje Ox. De acuerdo con (11), esta rotación es el origen de un momento aparente en el sistema de referencia cuyo valor es:

$$\vec{m}'_c = C\Omega\omega_1 \vec{k} \times \vec{i} = C\Omega\omega_1 \vec{j}$$

cuyo eje tiene la dirección de Oy.

Este momento, cuya magnitud es proporcional a  $\omega_1$ , producirá una aceleración angular que, según (I) vale

$$\omega'_2 \vec{j} = \frac{C\Omega}{A} \omega_1 \vec{j}$$



A su vez esta aceleración angular creará una rotación de magnitud creciente  $\vec{\omega}_2 j$  que, de acuerdo con (11), da origen a un momento aparente

$$\vec{m}''_c = C \omega_2 \vec{k} \times \vec{j} = -C \Omega \omega_2 \vec{i}$$

que se opone al momento exterior  $m \vec{i}$ . Por lo tanto la aceleración angular según Ox toma el valor

$$\omega'_1 = \frac{m - C \Omega \omega_2}{A}$$

de acuerdo con la primera (13).

Como  $\omega_1$  y  $\omega_2$  aumentan de magnitud con el tiempo, llegará un momento en que  $\omega_2$  alcanza el valor.

$$\omega_2 = \frac{m}{C \Omega} \quad (14)$$

entonces  $\omega'_1$  se anula mientras que  $\omega_1$  y por lo tanto  $m'_c$  y  $\omega'_2$  alcanzan sus máximos positivos. Por consiguiente  $\omega_2$  y  $m''_c$  continúan creciendo, lo que produce valores negativos de  $\omega'_1$ , ya que  $C \Omega \omega_2 > m$ , y esta aceleración angular negativa hará que  $\omega_1$  disminuya hasta anularse.

Cuando  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega'_2 = 0$  y  $\omega_2$  alcanza su máximo positivo mientras que  $\omega'_1$  se encuentra en su máximo negativo. En seguida  $\omega_1$  y  $\omega'_2$  toman valores negativos hasta que  $\omega_2$  se anule; entonces  $\omega'_1$  vuelve a tomar el valor primitivo  $\frac{m}{A}$  y el ciclo se repite.

Se deduce que las componentes  $\omega_1$  y  $\omega_2$  tienen variaciones periódicas, desfásadas en  $1/4$  de período, alrededor de un valor medio que es nulo para  $\omega_1$  e igual a (14) para  $\omega_2$ . Se observa además que este valor medio de  $\omega_2$  es igual al indicado por la ecuación (II) y al resultado obtenido al final del párrafo 7).

Por consiguiente las ecuaciones (13) nos indican claramente el papel desempeñado por las fuerzas de inercia y cómo éstas van haciendo cambiar la dirección de  $\vec{\omega}$  en el plano x O y.

11) Para obtener resultados cuantitativos tenemos que integrar las ecuaciones (13), lo que es fácil siempre que n sea constante. Derivemos las dos primeras respecto del tiempo, obtenemos:

$$\omega'_1 = \frac{1}{n} \omega''_2 ; \quad \omega'_2 = -\frac{1}{n} \omega''_1$$

e introduciendo estos valores en los segundos miembros de las ecuaciones (13) queda



$$\left. \begin{aligned} \omega''_1 + n^2 \omega_1 &= 0 \\ \omega''_2 + n^2 \omega_2 &= \frac{n}{A} m \\ \frac{C \Omega}{A} \chi &= n \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

La integral general de la primera es:

$$\omega_1 = L \operatorname{sen} nt + M \operatorname{cos} nt$$

$$\omega'_1 = L n \operatorname{cos} nt - M n \operatorname{sen} nt$$

Las condiciones iniciales son:  $t = 0$ ;  $\omega_1 = \quad$ ;  $\omega'_1 = \frac{m}{A}$ . Esto exige que

$$M = 0 ; L = \frac{m}{A n}$$

y la solución es:

$$\omega_1 = \frac{m}{A n} \operatorname{sen} nt$$

La integral general de la segunda ecuación (15) es:

$$\omega_2 = N \operatorname{sen} nt + P \operatorname{cos} nt + \frac{m}{A n}$$

$$\omega'_2 = N n \operatorname{cos} nt - P n \operatorname{sen} nt$$

Las condiciones son:  $t = 0$ ;  $\omega_2 = 0$ ;  $\omega'_2 = 0$ . Por lo tanto:

$$N = 0 ; P = - \frac{m}{A n}$$

$$\omega_2 = \frac{m}{A n} (1 - \operatorname{cos} nt)$$

Hemos obtenido así el sistema de ecuaciones finitas:



$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \frac{m}{A n} \operatorname{sen} n t \\
 \omega_2 &= \frac{m}{A n} (1 - \cos n t) \\
 n &= \frac{C \Omega}{A} - \chi
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

que definen el movimiento siempre que se conozca  $\chi$ .

Estas ecuaciones nos muestran que el extremo del vector  $\vec{\omega}$  describe, en el plano  $x O y$ , una circunferencia de radio  $\frac{m}{A n}$  con la velocidad angular  $n$ . Esta circunferencia pasa por el origen y tiene su centro sobre el eje  $O y$ .

Nos confirman, además, que el valor medio de  $\omega_1$  es nulo mientras que  $\omega_2$  oscila alrededor de  $\omega_2 = \frac{m}{A n}$ , es decir  $\frac{m}{C \Omega}$  si  $\chi = 0$ . La rotación  $\chi$  depende de cómo varía la dirección de  $\vec{m}$  durante el movimiento.

## 12) APLICACIÓN A LOS SÓLIDOS PESADOS.

Además del sistema de referencia móvil  $O x y z$  ya definido, consideremos un sistema fijo  $O x_0 y_0 z_0$  cuyo eje  $O z_0$  está dirigido según la vertical ascendente. Sea  $\vec{\zeta}$  el vector que define la posición del centro de gravedad del sólido, se tendrá:

$$\vec{m} = -P \vec{\zeta} \times \vec{k}_0$$

siendo  $P$  el peso del sólido. Se ve que  $\vec{m}$  es siempre perpendicular a  $\vec{k}_0$ , es decir, horizontal; por consiguiente, podemos hacer que  $O x$  coincida en todo momento con la dirección de  $\vec{m}$  y escribir:

$$\vec{m} = P \vec{\zeta} \operatorname{sen} \theta \vec{i}$$

expresión en que  $\theta$  es el ángulo  $z_0 O_0 z$ . Se deduce que  $O x$  coincidirá en todo momento con la intersección de los planos  $x O y$  y  $x_0 O y_0$ .

Las variaciones de  $\theta$  dependerán exclusivamente de la componente  $\omega_1$  y se tiene

$$\frac{d \theta}{d t} = \omega_1 = \frac{m}{A n} \operatorname{sen} n t$$



de donde:

$$\theta = \theta_0 + \frac{m}{A n^2} (1 - \cos nt)$$

Por consiguiente  $\theta$  varía entre  $\theta_0$  y  $\theta_0 + \frac{2m}{A n^2}$  durante el movimiento y esta variación afectará la magnitud de  $m$ ; sin embargo, si  $A n^2$  es grande comparado con  $m$ , lo que sucederá si  $\Omega$  es grande, podemos despreciar estas variaciones y admitir que  $m$  es constante, condición necesaria para la validez de las ecuaciones (16).

La velocidad del extremo de  $i$  es

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = (\vec{\omega} + \chi \vec{k}) \times \vec{i} = \chi \vec{j} - \omega_2 \vec{k}$$

Por otra parte, esta velocidad debe estar siempre contenida en un plano perpendicular a  $\vec{k}_0$  y se la puede representar por una rotación de velocidad angular  $\psi$  alrededor de  $Oz_0$ . Se tiene entonces la relación

$$\chi \vec{j} - \omega_2 \vec{k} = \psi \vec{k}_0 \times \vec{i}$$

Multipliquémosla escalarmente por  $\vec{j}$ , queda:

$$\chi = \psi \vec{k}_0 \cdot \vec{k} = \psi \cos \theta \quad (17)$$

Si la multiplicamos escalarmente por  $-\vec{k}$ , se obtiene:

$$\omega_2 = \psi \vec{k}_0 \cdot \vec{j} = \psi \sin \theta \quad (18)$$

en efecto, los ejes  $Oz$ ,  $Oz_0$ ,  $Oy$  se encuentran en un mismo plano ya que son todos perpendiculares a  $Ox$ ; por consiguiente  $z_0 Oy = 90^\circ - z_0 Oz = 90^\circ - \theta$ .

Si eliminamos  $\psi$  entre (17) y (18), obtenemos:

$$\chi = \omega_2 \cos \theta \quad (19)$$

y reemplazando  $\omega_2$  por su valor (16):

$$\chi = \frac{m}{A n} \cot \theta (1 - \cos nt) = \frac{P \zeta}{A n} \cos \theta (1 - \cos nt)$$



Esta ecuación es más complicada que lo que parece, pues  $\theta$  y  $n$  dependen de  $\chi$ , y es imposible despejar  $\chi$ . Tenemos que introducir una aproximación, la que nos es sugerida por la condición de que  $\chi$  debe ser constante en la expresión de  $n$  para que las ecuaciones (16) sean válidas.

Consideremos entonces el valor medio de  $\chi$  y despreciemos la variación de  $\theta$ , como lo hicimos en la expresión de  $m$ . Se obtiene así la ecuación

$$\chi = \frac{m \cot \theta}{C \Omega - \chi A} = \frac{m \cot \theta}{C \Omega} \left( 1 + \frac{A \chi}{C \Omega} \right)$$

que vamos a resolver por aproximación. Si  $\Omega$  es grande, la componente  $\chi$  será pequeña ya que es proporcional a  $\omega_2$ ; por consiguiente  $\frac{A \chi}{C \Omega}$  es pequeño comparado con la unidad. Por consiguiente la primera aproximación es:

$$\chi = \frac{m \cot \theta}{C \Omega}$$

y la segunda

$$\chi = \frac{m \cot \theta}{C \Omega} \left( 1 + \frac{A m \cot \theta}{C^2 \Omega^2} \right)$$

Por consiguiente, el adoptar la primera aproximación equivale a despreciar el segundo término del paréntesis, es decir  $\frac{A P \zeta \cos \theta}{C^2 \Omega^2}$ , al lado de la unidad. Admitiremos que  $\Omega$  es suficientemente grande para que se justifique esta aproximación. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{m}{C \Omega} \operatorname{sen} nt \\ \omega_2 &= \frac{m}{C \Omega} (1 - \cos nt) \\ \chi &= \frac{m}{C \Omega} \cot \theta (1 - \cos nt) \\ \psi &= \frac{m}{C \Omega \operatorname{sen} \theta} (1 - \cos nt) \\ n &= \frac{C \Omega}{A} - \frac{m \cot \theta}{C \Omega} \end{aligned} \tag{20}$$



13) Introduzcamos un tercer sistema de referencia,  $Ox_1 y_1 z_1$ , que coincide con  $Ox$  y  $z$  en el instante inicial, pero cuyo movimiento es una rotación uniforme alrededor de  $Oz_0$  con la velocidad angular

$$\psi_1 = \frac{m}{C \Omega \operatorname{sen} \theta} = \frac{P \xi}{C \Omega}$$

es decir el valor medio de la velocidad angular  $\psi$  del plano  $z_0 Oz$ .

Sea  $\varphi$  el ángulo que  $z_0 Oz$  forma con su posición inicial y  $\varphi_1$  el ángulo del plano  $z_0 Oz_1$  con su posición inicial que es la misma de  $z_0 Oz$ . Se tendrá:

$$\varphi_1 = \frac{m}{C \Omega \operatorname{sen} \theta} t$$

y

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi = \frac{m}{C \Omega \operatorname{sen} \theta} (1 - \cos nt)$$

de donde

$$\varphi = \frac{m}{C \Omega n \operatorname{sen} \theta} (nt - \operatorname{sen} nt)$$

Por consiguiente el ángulo que  $z_0 Oz$  forma con el plano  $z_0 Oz_1$  es:

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{-m}{C \Omega n \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} nt = \frac{-A m}{C^2 \Omega^2 \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} nt$$

y el ángulo que  $Oz$  forma con su proyección sobre  $z_0 Oz_1$  será:

$$\mu = (\varphi - \varphi_1) \operatorname{sen} \theta = -\frac{A m}{C^2 \Omega^2} \operatorname{sen} nt$$

mientras que el ángulo de dicha proyección con  $Oz_1$  es  $\theta - \theta_0$ , expresión que hemos calculado en el párrafo 12) y que puede escribirse:

$$\nu = \theta - \theta_0 = \frac{A m}{C^2 \Omega^2} (1 - \cos nt)$$

Se ve que los ángulos  $\mu$  y  $\nu$  son muy pequeños; por consiguiente, las componentes de  $\vec{\omega}$  según  $\vec{i}_1$  y  $\vec{j}_1$  no diferirán apreciablemente de las según  $\vec{i}$  y  $\vec{j}$  definidas por (20). Por lo tanto, podemos escribir:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i}_1 + \omega_2 \vec{j}_1$$

$$\vec{G} = A(\omega_1 \vec{i}_1 + \omega_2 \vec{j}_1) + C \Omega \vec{k}$$





Ahora bien, si se estudia la posición de los distintos ejes, se ve que un ángulo  $\nu$  positivo corresponde a un desplazamiento del extremo de Oz según  $-Oy_1$ ; en cambio, un ángulo  $\mu$  positivo corresponde a un desplazamiento según  $Ox_1$ . Por consiguiente:

$$\vec{k} = \vec{k}_1 - \frac{A m}{C^2 \Omega^2} (\text{sen } nt \vec{i}_1 + (1 - \cos nt) \vec{j}_1)$$

y amplificando esta relación por  $C \Omega$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} C \Omega \vec{k}_1 &= \frac{A m}{C \Omega} [\text{sen } nt \vec{i}_1 + (1 - \cos nt) \vec{j}_1] + C \Omega \vec{k} \\ &= A (\omega_1 \vec{i}_1 + \omega_2 \vec{j}_1) + C \Omega \vec{k} = \vec{G} \end{aligned}$$

lo que nos demuestra que el vector  $\vec{G}$  describe el cono vertical de ángulo generador  $\theta_0$ . En cambio el movimiento de oz corresponde al de la generatriz de un cono de revolución de ángulo generador  $\frac{A m}{C^2 \Omega^2}$  que rueda con la velocidad angular  $n$  sobre el cono anterior.

Se desprende de este estudio que la explicación sencilla del párrafo 8) es solamente una aproximación grosera que nos da para el eje oz un movimiento poco diferente de su movimiento medio. El movimiento real del eje de figura del sólido es mucho más complicada y corresponde al de la generatriz de un cono de revolución que rueda sobre otro, como acabamos de explicar.

Para terminar agregaremos que el movimiento de oz debido a la rotación  $\omega_2 \vec{j}$  (o a la rotación  $\psi \vec{k}_0$ ) se llama *movimiento de precesión*; el que corresponde a la rotación  $\omega_1 \vec{i}$ , *movimiento de nutación*.

#### 14) APLICACIONES: GIROSCOPIO.

Se llama giroscopio un sólido de revolución cuyo eje está montado en una suspensión tal que pueda tomar cualquiera orientación sin que se desplace el centro de gravedad del sólido. Supondremos que este sistema de suspensión es sin frotamiento y que está rígidamente ligado a la superficie terrestre en un lugar de latitud  $\lambda$ .

En el instante inicial el giroscopio gira con la velocidad angular  $\Omega$  alrededor de su eje, cuya dirección se ha fijado con respecto a la Tierra. Si designamos por  $\vec{k}$  el vector que define esta dirección inicial del eje y por  $\vec{\omega}$  el vector representativo



de la rotación de la tierra, el movimiento absoluto del giroscopio será la rotación  $\vec{\omega} + \Omega \vec{k}$  y su momento cinético será

$$\vec{G} = A \vec{\omega}_n + C (\vec{\omega}_k + \Omega \vec{k})$$

siendo  $\vec{\omega}_k$  la componente de  $\vec{\omega}$  según  $\vec{k}$  y  $\vec{\omega}_n$  su componente normal a  $\vec{k}$ . Como  $\vec{\omega}$  es muy pequeño comparado con  $\Omega \vec{k}$ , la dirección de  $\vec{G}$  diferirá muy poco de la de  $\vec{k}$ .

Si se libera el eje de manera que pueda modificar su orientación respecto de la Tierra, el vector  $\vec{G}$  quedará invariable ya que ningún momento actúa sobre el sólido. Por lo tanto el eje del giroscopio describirá alrededor de  $\vec{G}$  un cono de revolución de ángulo generador igual al que formaba con  $\vec{G}$  en el instante inicial, es decir, muy pequeño. Se desprende que, prácticamente, el eje del giroscopio conservará una orientación invariable en el espacio, a pesar de la rotación de la Tierra.

Esta propiedad se utiliza para la estabilización automática de aeroplanos, torpedos, etc. Otra aplicación es el giroscopio de Foucault, que permite evidenciar la rotación terrestre, de donde el nombre de giroscopio que se generalizó después.

Consideremos un giroscopio cuya suspensión consiste en un anillo que puede girar alrededor de su diámetro vertical; otro anillo, que puede girar alrededor del diámetro horizontal del primero, soporta el eje del sólido de revolución que coincide con el diámetro perpendicular al de los ejes que unen ambos anillos; el centro de gravedad del sólido se encuentra en el punto de intersección de los ejes de suspensión de los anillos.

Si se inmoviliza el eje con respecto a la Tierra, de preferencia en una dirección horizontal, se lanza el giroscopio y se libera su eje, éste conservará su dirección en el espacio. Como la rotación  $\vec{\omega}$  de la Tierra corresponde a una componente vertical  $\omega \sin \lambda$ , el anillo que gira alrededor de un eje vertical tendrá, respecto de la tierra, una rotación de velocidad angular  $-\omega \sin \lambda$ .

## 15) COMPÁS GIROSCÓPICO

Estudiemos ahora el caso de un giroscopio cuya suspensión consiste en un solo anillo que puede girar libremente alrededor de un diámetro vertical ligado a la tierra y que soporta el eje del giroscopio de manera que coincida con su diámetro horizontal, y que el centro de gravedad del giroscopio y del anillo coincidan con la intersección de los dos diámetros. Se ve que esta suspensión obliga al eje del giroscopio a mantenerse dentro del plano horizontal que pasa por su centro de



gravedad. Además, si la suspensión tiene un movimiento de rotación, solamente la componente normal al eje del giroscopio será transmitida a éste.

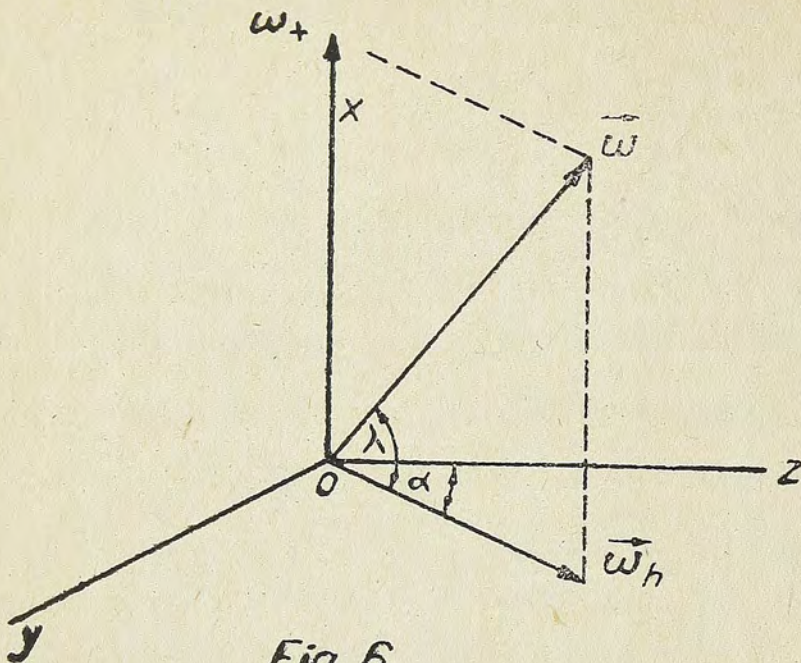


Fig. 6

Tomemos un sistema de referencia, cuyo origen coincide con el centro de gravedad del giroscopio, cuyo eje Ox tiene la dirección de la vertical ascendente mientras que Oz coincide con el eje del giroscopio en el sentido que corresponde a su rotación  $\Omega$ .

Sea  $\omega$  el vector que representa la rotación de la tierra; se la puede descomponer en una componente vertical

$$\vec{\omega}_x = \omega \text{ sen } \lambda \vec{i}$$

y una componente horizontal  $\vec{\omega}_h = \omega \text{ cos } \lambda$ . A su vez esta última se descompone en

$$\omega_z = \omega \text{ cos } \lambda \text{ cos } \alpha; \quad \text{y} \quad \omega_y = \omega \text{ cos } \lambda \text{ sen } \alpha.$$

Inmovilicemos el eje del giroscopio respecto de la tierra en la dirección Oz e imprimámosle una velocidad de rotación respecto de la tierra  $\Omega_r \vec{k}$ ; su velocidad absoluta según  $\vec{k}$  será

$$\vec{\Omega} = (\Omega_r + \text{cos } \lambda \text{ cos } \alpha) \vec{k}$$

Si entonces liberamos este eje, la suspensión le imprimirá una rotación

$$\vec{\eta} = \omega \text{ cos } \lambda \text{ sen } \alpha \vec{j}$$

En efecto, como hemos dicho, las rotaciones  $\omega_x$  y  $\omega_z$  no pueden ser transmitidas al giroscopio por la suspensión. Por lo tanto su rotación según  $\vec{k}$  es invariable y conserva el valor  $\Omega$  indicado más arriba.

En rigor, deberíamos tomar en cuenta las aceleraciones de arrastre debidas a  $\vec{\omega}$ ; sin embargo, como éstas son del orden de  $\omega^2$ , las podemos despreciar en comparación con los términos del orden  $\omega$ .

Con esta aproximación, la única aceleración será la correspondiente al momento de las fuerzas de Coriolis. Este momento es

$$\vec{m}_c = C \Omega \vec{k} \times \vec{\eta} = - C \Omega \omega \text{ cos } \lambda \text{ sen } \alpha \vec{i}$$



y producirá la aceleración angular

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - \frac{C \Omega}{A} \omega \cos \lambda \sin \alpha$$

expresión en que A es el momento de inercia del giroscopio y el anillo de suspensión respecto de Ox.

Esta ecuación corresponde a un movimiento pendular; luego el eje del giroscopio efectuará oscilaciones en el plano yoz alrededor de la dirección de  $\vec{\omega}_h$  que apunta siempre hacia el Norte astronómico,

Esta propiedad, también señalada por Foucault, es aplicada en los compases giroscópicos Sperry y análogos que son utilizados en los buques de guerra y especialmente en los submarinos. Sin embargo, éstos son mucho más complicados que el dispositivo de Foucault; en efecto, es preciso compensar en ellos los movimientos de precesión causados por los momentos introducidos por los frotamientos de la suspensión y por los dispositivos de compensación mismos. Además la marcha del buque y sus oscilaciones debidas al oleaje son también el origen de perturbaciones que es preciso compensar.