

# ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE  
Calle San Martín N.º 352 - Casilla 487 - Teléf. 88841 - Santiago - Chile

Año XXXVII

♣

Marzo de 1937

♣

N.º 3

Fco. Javier Domínguez S.

## Integración gráfica de la ecuación de remanso

**H**AN trabajado los hidraulicistas de todas partes del mundo por facilitar el cálculo de las curvas del eje hidráulico del movimiento variado, largo y demoroso a veces en desproporción con el resultado obtenido. Entre ellos abundan los que han introducido simplificaciones que habiéndolo facilitado muy poco, en cambio lo han desfigurado, apartándose los resultados enormemente de la realidad: tales son especialmente las consideraciones de ancho infinito, de coeficiente  $C$  constante o las que prescinden de las variaciones de  $\frac{U^2}{2g}$ .

Si esto sucede para llegar a sentar la ecuación diferencial de la curva de movimiento variado, mucho peores son los resultados que las simplificaciones ocasionan en su integración, o sea, la utilización práctica de dicha ecuación. Son groseras las simplificaciones necesarias para llegar a algún resultado más aparente que efectivo. Las siguientes ideas constituyen, precisamente, un método gráfico sencillo de hacer esa integración.

Hace unos dos años, publiqué en «Los Anales del Instituto de Ingenieros» un pequeño artículo, que se titulaba: «Nueva forma de la ecuación de la tangente a la curva de remanso», en que sin hacer ninguna hipótesis que limitara la validez de su aplicación daba todas las características de los seis casos de movimiento variado. Esa ecuación es:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{V^2 (i - J)}{V^2 - U^2} \quad (1)$$

en que  $V^2 = g \frac{\Omega}{l}$ , siendo  $\Omega$  la sección mojada y  $l$  el ancho superficial, correspondientes a la altura  $h$  que tiene el agua en el punto considerado;  $J$  es la pérdida de carga y vale en función del gasto:  $J = \frac{Q^2}{\Omega^2 C^2 R}$ , si en esta ecuación ponemos  $C$  en alguna de las formas monomías usuales, como son las fórmulas de Manning o Forchheimer, se tendría:

$$J = \frac{Q^2 n^2}{\Omega^2 R^m}$$

en esta expresión  $n$  es el coeficiente de rugosidad, y el exponente  $m$  vale 1,33 según Manning y 1,40 según Forchheimer;  $\Omega$  es, como arriba, la sección que corresponde a la altura de agua  $h$ , y  $R$  el radio hidráulico también correspondiente a  $h$ . El gasto  $Q$ , la pendiente  $i$  del fondo y la rugosidad de las paredes, como la forma geométrica del lecho son constantes, pues obvio era decirlo, estamos en el caso usual de movimiento permanente y de invariabilidad de forma, dimensiones y pendiente. El último término del denominador  $U$  es la velocidad media:  $U = \frac{Q}{\Omega}$ , en que  $\Omega$  tiene el significado anterior.

En resumen, se ve que todas las cantidades que entran en la ecuación 1), o son constantes, como  $Q$  e  $i$  o son funciones de la altura  $h$ , por lo tanto,  $\frac{dh}{ds}$  es función de  $h$ . También lo es su inversa, o sea:

$$\frac{ds}{dh} = f(h)$$

Esta función se puede calcular con pocos puntos. Tiene algunos bien conocidos como  $\frac{dh}{ds}$ , que son los que corresponden a la altura crítica ( $h=h_c$ ) y a la altura normal o altura de escurrimiento con movimiento uniforme ( $h=h_n$ ). (1)

En la altura crítica  $\frac{ds}{dh} = 0$  y en la altura normal es  $\infty$ . No entraremos en otras discusiones que no necesitamos para nuestro cometido actual. En todo caso, y tomando en cuenta esos puntos, es fácil trazar calculando, otros *muy pocos puntos intermedios* esa función, llevando en ordenadas  $h$  y en abscisas  $\frac{ds}{dh}$ .

Se obtendrán gráficos como los de la figura 1, el a) correspondiente a pendiente suave y el b) a pendiente fuerte. En uno de estos gráficos, un elemento de área, de altura elemental, comprendido entre el eje de las  $h$  y la curva, vale evidentemente:

$$\frac{ds}{dh} dh = ds.$$

Entre dos valores finitos,  $h_0$  y  $h_1$ , el área comprendida entre la curva y el eje de las  $h$  es la distancia  $s_0 - s_1$  que distan esas dos alturas en el eje hidráulico estudiado; en otras palabras, si partimos de una altura conocida  $h_0$ , (como en el caso de torrente deprimido en pendiente suave, dibujado en la fig. 2) y queremos determinar a qué distancia se produce otra altura  $h$  de dicho eje hidráulico, la medida a planímetro del área hachurada de la figura, determinando su valor en metros, por medio del cálculo de escalas, dará esa distancia. Es de observar que se puede tener la distancia entre cualesquiera dos alturas, sin necesidad de ir por puntos escalonados, que dan más exacto el trazado del eje hidráulico, mientras más cercanos son los valores de  $h$ , entre los que se va calculando.

(1) Véase «Curso de Hidráulica», por F. J. Domínguez, págs. 54, 58, 334 y 363.

La anterior demostración, sencillísima y de gran utilidad práctica, es debida al señor Pablo Pérez Zañartu, muy distinguido alumno del 5.º año de Ingeniería de la Universidad de Chile.

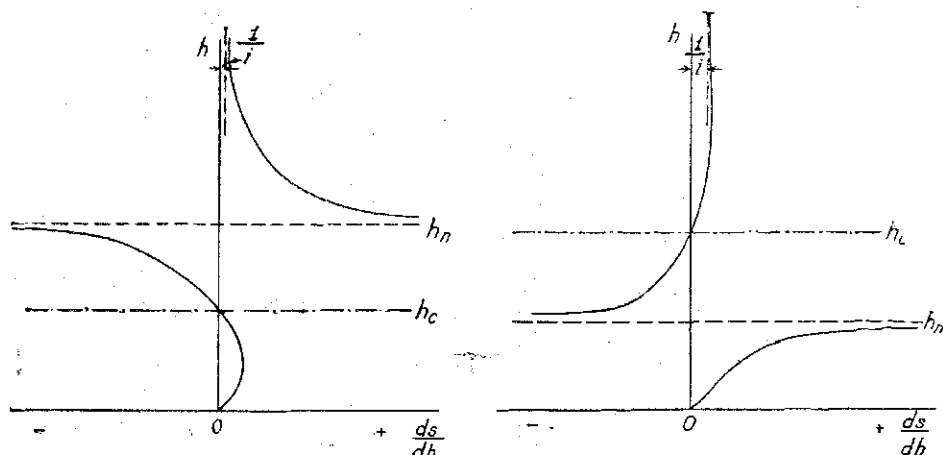


Fig. 1

Un ejemplo nos hará ver su aplicación: se trata de trazar el eje hidráulico de un canal rectangular de 1 m. de ancho, hecho de albañilería de piedra y cuya pendiente de fondo es de 0,02 cuando escurre 1 m<sup>3</sup>:s: en este canal existe una compuerta transversal que deja un orificio de fondo de todo el ancho del canal y de 0,33 m. de altura.

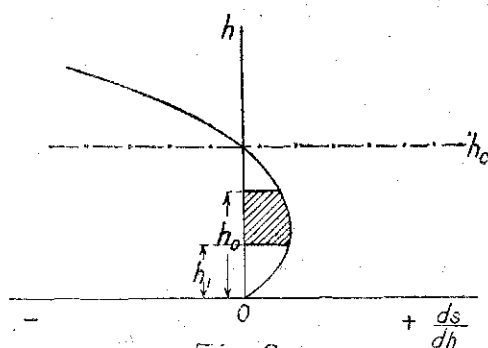


Fig. 2

Los datos de  $Q=1 \text{ m}^3:\text{s}$ ,  $n=0,017$  de Ganguillet y Kutter e  $i=0,02$  nos dan una profundidad crítica de  $h_c=0,47 \text{ m}$ . y una profundidad de movimiento uniforme de  $h_n=0,36 \text{ m}$ . Se trata, pues, de una pendiente fuerte. (1)

(1) Para  $h=0$  el valor de  $\frac{ds}{dh}$  es («Curso de Hidráulica», pág. 375)  $\frac{ds}{dh} = \frac{C^2}{g}$ . Las fórmulas más usadas, como las de Ganguillet y Kutter, Bazin, Manning, dan para  $h=0$ ,  $C=0$  y, por lo tanto, también  $\frac{ds}{dh}=0$ . Esto hemos supuesto aquí para evitarnos mayores cálculos, aunque creemos más cercano a la realidad aceptar con Koechlin valores de  $C$  distintos de cero para  $h=0$ , con lo que se obtendrían valores positivos para  $\frac{ds}{dh}$ .

El orificio de la compuerta, tanteando en la forma ordinaria (1) nos da un coeficiente de gasto  $m = 0,60$  y por lo tanto una vena contraída de

$$0,60 \times 0,33 = 0,20 \text{ m.}$$

de altura. La carga del orificio está dada por la ecuación.

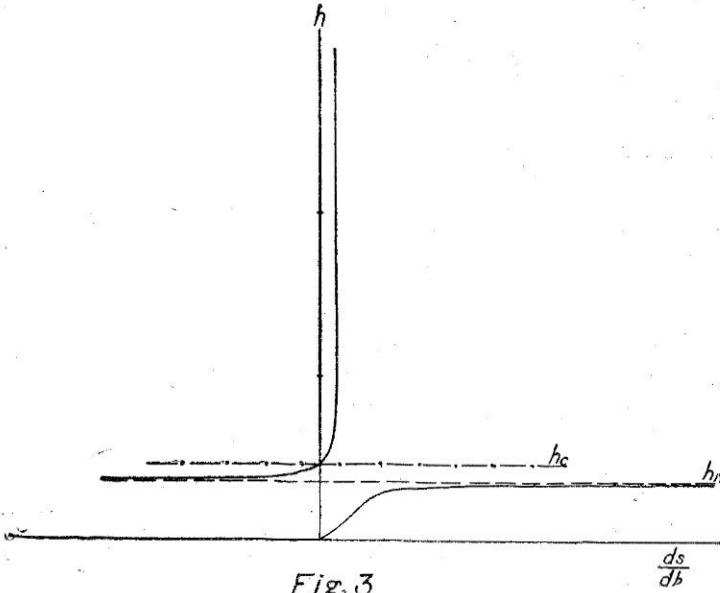


Fig. 3

$$1,0 = 0,20 \sqrt{2gh}$$

$$h = 1,28$$

es decir que el Bernoulli antes del orificio es de

$$B_o = 1,28 + 0,20 = 1,48 \text{ m.}$$

y por lo tanto la altura (2) de agua es de 1,455.

Aguas arriba de la compuerta se genera en consecuencia un río *peraltado en pendiente fuerte* (3), que tiene junto a la compuerta 1,455 m. de altura y se desarrolla hacia arriba hasta que tome la altura de río del resalto que corresponde a la del torrente de 0,36 m; es decir (4)

(1) Curso de Hidráulica, pág. 107 y 108.

(2) Curso de Hidráulica, pág. 60 y 61 ejemplo.

(3) Curso de Hidráulica, pág. 376.

(4) Curso de Hidráulica, págs. 268, hoja 134 y 277 (ejemplo del pie de la página).

$$\frac{h_o}{h_c} = \frac{0,36}{0,47} = 0,77 \text{ al que corresponde } \frac{h_I}{h_c} = 1,27 \text{ o sea}$$

$h_I = 0,60 \text{ m}$ , por lo tanto, el río peraltado abarcará alturas comprendidas entre  $0,60$  y  $1,455 \text{ m}$ .

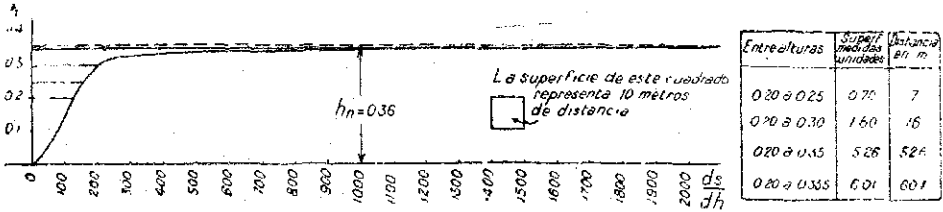


Fig 4

Aguas abajo de la compuerta parte el *torrente deprimido en pendiente fuerte* (1) desde la altura de la vena contraída de  $0,20 \text{ m}$  hasta de movimiento uniforme de  $0,36 \text{ m}$ .

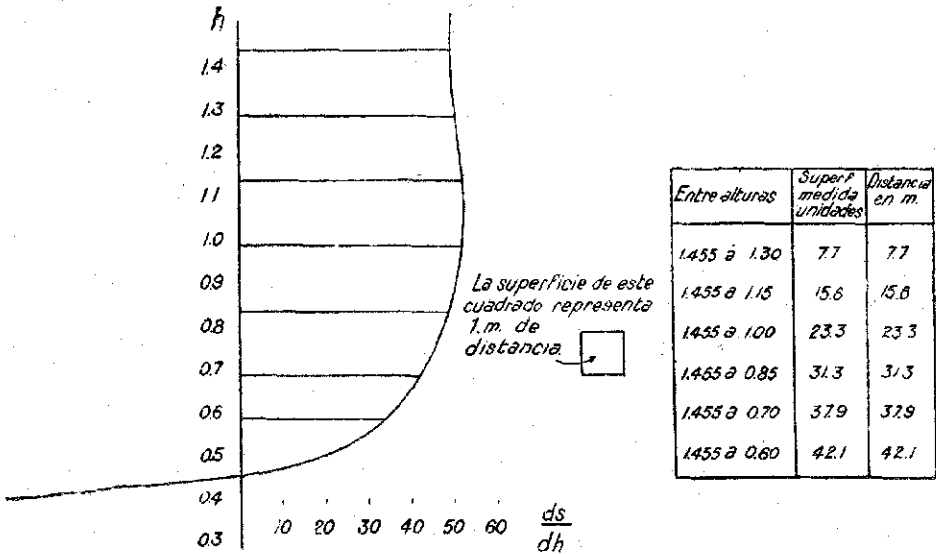


Fig 5

Será, pues, necesario dibujar la función  $\frac{ds}{dh}$  entre los valores de la altura de río de  $1,455$  a  $0,60$  y de torrente de  $0,20$  a  $0,36$ . Para el río bastará con hacer el cálculo de unos 4 puntos que corresponden a

$h = 0,60 \quad 0,80 \quad 1,10 \quad 1,455$

(1) Curso de Hidráulica, pág. 107 y 108.

Para el torrente calcularemos también 4 puntos que serán los que corresponden a

$$h=0,20 \quad 0,30 \quad 0,34 \quad 0,35$$

Como se vé hay dos cercanos a la altura normal, que especialmente interesan. Es inútil calcular para  $h=h_n=0,36$ , pues, como se deduce de la discusión del eje hidráulico, y quedó dicho, para esa altura  $\frac{ds}{dh}$  vale infinito.

A continuación, van los ocho valores calculados.

Es necesario notar que para el cálculo del eje hidráulico por puntos escalonados hubieran sido necesarios unos 18 puntos, es decir, más del doble que éstos. Cada uno de los 18 hubieran necesitado un cálculo tan laborioso como cada uno de estos 8.

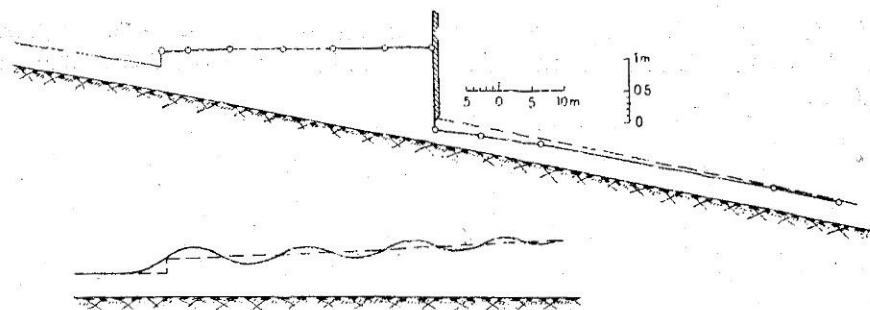


Fig 6

Con los valores del cuadro anterior se ha trazado el gráfico de la figura 3, completando la curva a mayor extensión que la zona que aparece calculada en el cuadro. Una simple ojeada del gráfico de la fig. 3 o de los valores de  $\frac{ds}{dh}$  que aparecen arriba revela la conveniencia de construir el gráfico por partes, a escalas diferentes; a eso obedecen las figuras 4 y 5, con la ayuda de las cuales se ha hecho el cálculo del eje hidráulico. La inspección de las figuras indica las medidas a planímetro que se han efectuado. Es de notar que solamente en el eje de las ordenadas existen dimensiones de longitud, pues las unidades en abscisas son simples números, de modo que es fácil rehacer los cálculos de las superficies que aparecen efectuadas.

En la figura 6 aparece el eje hidráulico dibujado con algunas referencias útiles para estudiar el trazado.

El resalto no está en este caso constituido por un solo salto brusco, sino que está formado por una serie de ondulaciones (1) que se prolongan indefinidamente hacia aguas abajo. Al dibujo de conjunto del eje hidráulico se ha agregado otro en que se ve la forma ondulada del resalto en escalas iguales, vertical y horizontal.

El dibujo de conjunto muestra la forma que da el cálculo sencillo, aceptando el régimen de filetes paralelos.

(1) Curso de Hidráulica, pág. 274 y 275.