

Curso de Hidráulica General

(Continuación)

37. Fenómenos incidentales. Remolinos de succión.—Antes de terminar este capítulo se considerarán brevemente algunos interesantes fenómenos incidentales relacionados con escurrimientos por orificios, y demás singularidades de contorno cerrado. Empezaremos por el *remolino de succión*.

Cuando la carga de una disposición de contorno cerrado es pequeña, o aun en cargas relativamente grandes, si se reúnen ciertas condiciones, se presenta un hueco en el seno del líquido anterior a la singularidad, en forma de un embudo, notándose que en la superficie de la concavidad las moléculas están animadas de grandes velocidades de rotación. A veces basta una impulsión o una disimetría de la disposición para provocar la rotación del líquido que genera el *remolino de succión*.

La velocidad de las partículas, que aparentemente es de rotación, es en realidad efectuada en trayectorias de forma de hélice, cuyas espiras se van haciendo más verticales mientras más cerca de la disposición final se encuentran.

Se puede aceptar despreciables los frotamientos y el régimen permanente. En la *figura 86*, en que aparece dibujado esquemáticamente el remolino de succión, se ve la forma de la superficie libre y la trayectoria de una partícula que viene desde lejos, con velocidad de partida despreciable. Llamaremos ζ la cota de la superficie libre del remolino a la distancia r de su eje, respecto a un plano general de referencia.

La trayectoria elizoidal de una molécula puede asimilarse a círculos horizontales por lo menos en la parte superior, de modo que la aceleración efectiva de la molécula, de velocidad V , a la distancia r

del eje del remolino es centrípeta y vale $\frac{V^2}{r}$ por lo tanto, respecto a un eje horizontal, si el origen de coordenadas está situado sobre el eje del remolino, la ecuación general de la Hidrodinámica se escribirá:

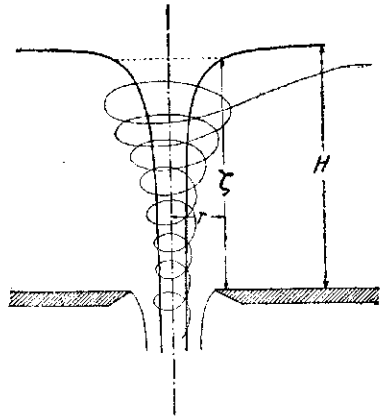


Fig. 86.

$$\frac{l}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{V^2}{r}$$

En toda espira de radio r , normal a la fuerza centrífuga o fuerza de inercia, rige la ley hidrostática, como la cota del nivel libre, correspondiente al radio r es ζ , la cota piezométrica es sólo función del radio, puesto que escribiendo la ecuación general de la Hidrodinámica respecto a un eje vertical llegaríamos a:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \zeta$$

Aplicando el teorema de Bernoulli a la molécula desde aguas tranquilas, donde vale H , hasta el punto donde la velocidad es V , a la distancia r del eje del remolino, obtendremos la relación:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = H$$

Esta ecuación derivada respecto al radio, notando que z y h son constantes se escribirá:

$$\frac{l}{\gamma} \frac{dp}{dr} = - \frac{V}{g} \frac{dV}{dr}$$

Multiplicándola por g , igualando el segundo miembro de ella con el de la Hidrodinámica respecto al radio, se obtiene:

$$\frac{dV}{V} = - \frac{dr}{r}$$

o sea,

$$Vr = cte = K \tag{59}$$

Esta ecuación nos dice que las velocidades en un remolino son inversas de la distancias a su eje, como lo enunció Leonardo de Vinci.

La ecuación de Bernoulli, introduciendo el valor de ζ y el de V de la (59), queda:

$$\zeta + \frac{K^2}{2g r^2} = H$$

y por lo tanto:

$$\zeta = H - \frac{K^2}{2g r^2} \tag{60}$$

relación que permitiría trazar la forma de la superficie libre, pues relaciona ζ con r , en la zona superior en que las trayectorias se pueden considerar horizontales.

En cuanto a la influencia que estos remolinos, cuya teoría supone la constancia de la suma de Bernoulli, pueden tener, en el gasto que escurre por el orificio, hay algunos autores que afirman que lo disminuyen, pretendiendo explicar esto por la disminución de altura visible; pero Bazin los observó, con cargas de 1 m. y orificios de 0,20 de diámetro, en 8 casos en que se originaban remolinos con un delgado tubo por donde el aire de la superficie se inyectaba en la vena y en 5 experiencias en que evitó su producción dejando flotar una tabla sobre el orificio y ninguna diferencia dieron los aforos.

38. Inversión de la vena.—Otro curioso fenómeno que se presenta en las venas líquidas es la *inversión* que consiste en el cambio de forma que van experimentando a medida que se alejan del orificio.

Se observa que los ángulos se van biselando y que el proceso de deformación continúa indefinidamente, tendiendo a convertir el polígono en una estrella formada por láminas perpendiculares a los lados del orificio (Fig. 87) en cuya intersección central queda un núcleo y en cuyos bordes se forma a veces un cordón.

La convergencia de las trayectorias para llegar a la contracción puede alterar las formas por los choques y cruzamientos de ellas; pero parece que la tensión superficial que tiende a disminuir el perímetro de la sección de la vena y, principalmente, a suprimir los ángulos, va originando velocidades transversales que producen más adelante deformaciones antagónicas. La influencia de la tensión superficial en la contracción ha sido comprobada por Woltmann e Isarn (1888) quienes evaporando éter (lo que baja la tensión capilar de la vena) observaron un aumento de gasto con pequeñas cargas.

Bovey refiere experiencias que corresponderían a verdaderas palpitaciones de una envoltura elástica, simultáneas con el escurrimiento de la vena.

Las deformaciones de secciones circulares en elípticas de menor eje vertical, se podría explicar por la mayor velocidad de los filetes inferiores que los llevaría hacia los superiores cuyas trayectorias sería de menor alcance.

Cuando la carga es grande la inversión consiste en la transformación del polígono del orificio en una estrella cuyos entrantes coinciden con los vértices del polígono de origen y cuyos puntos hasta 4 veces más grandes que los lados del orificio enfrentan a sus lados. Así puede verse en las experiencias de Bidone, hechas con cargas de 7,30 m. en orificios situados en pared vertical, es decir, venas horizontales. La Fig. 87 muestra dos ejemplos de esas experiencias.

Si las cargas son pequeñas no son tan grandes relativamente las puntas del

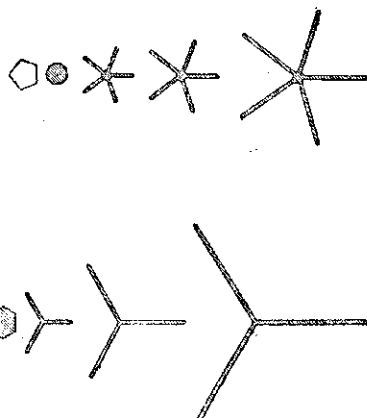


Fig. 87

polígono estrellado y, en cambio, la vena es una cadena o serie de inversiones con nodos, aumentos y disminuciones de la longitud de los lados de la estrella, pero no de la magnitud de la sección de la vena. Como ejemplo de pequeñas cargas puede verse en la Fig. 88, dos experiencias de Magnus (1855), con cargas de 0.40 m. en venas verticales de orificios horizontales. En las grandes cargas quizás no se ven nodos porque la vena es desagregada por el aire antes de producirlos.

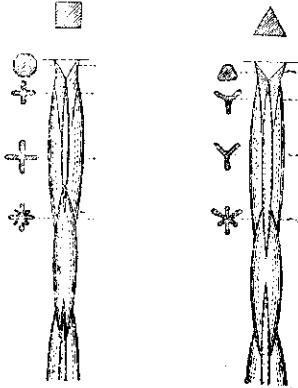


Fig. 88

En verdad este hermoso fenómeno de la inversión observada por Bidone hace ya un siglo, no ha sido aún reducido al cálculo y no tenemos de él un conocimiento científico.

39. Trayectoria de los chorros.—Para el trazado de la trayectoria de la vena líquida que sale de un orificio, en la atmósfera que la rodea, se puede prescindir de los frotamientos con el aire cuando las velocidades son pequeñas y las dimensiones del orificio no son muy reducidas y, dada la constancia de las presiones, el eje de los chorros es la trayectoria parabólica de un punto material pesado.

El problema tiene muy fácil solución tomando como ejes coordenados la perpendicular al plano del orificio que pasa por el centro de él y la vertical en ese punto, (Fig. 89). Sobre el primer eje la coordenada crece uniformemente con la velocidad V_0 de la vena contraída: $x = V_0 t$. Sobre el segundo, el extremo de la coordenada tiene un movimiento de aceleración g , de velocidad inicial nula:

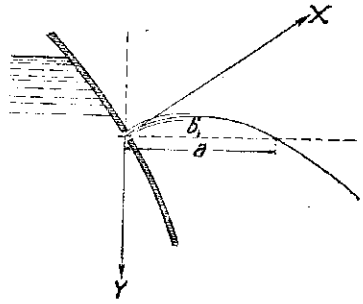


Fig. 89

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

Se puede pues indicar inmediatamente por sus coordenadas las situaciones correspondientes a distintos valores de t .

Eliminando t se tiene:

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2} \quad (61)$$

La inclinación de la tangente a la curva será:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g x}{V_0^2}$$

Si

$$V_o = \sqrt{2gh}$$

se llega a

$$y = \frac{x^2}{4h} \quad (61a)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2h} \quad (61b)$$

lo que permite una fácil construcción de la curva que forma el chorro; pues para el valor especial $x = 2h$, la inclinación $\frac{dy}{dx} = 1$.

Interesa conocer el alcance horizontal y vertical del chorro, llamando así, respectivamente, a la distancia horizontal a en que el eje del chorro vuelve a pasar por el plano horizontal del centro de gravedad del orificio y a la altura mayor b que alcanza sobre ese plano. Con el sistema de ejes elegido, el plano horizontal forma un ángulo α con el eje X y las coordenadas X_a e Y_a del alcance horizontal serán:

$$X_a = \frac{a}{\cos \alpha}$$

$$Y_a = X_a \operatorname{sen} \alpha$$

Como una ordenada cualquiera es:

$$y = \frac{l}{2} g \frac{x^2}{V_o^2}$$

se tiene para el alcance horizontal

$$\frac{l}{2} g \frac{X_a^2}{V_o^2} = X_a \operatorname{sen} \alpha$$

o sea, finalmente, reemplazando el valor de X_a

$$a = \frac{2V_o^2}{g} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (62)$$

si $V_o^2 = 2gh$ se tiene

$$a = 4h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (62a)$$

El alcance horizontal es máximo cuando $\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$, o sea cuando $\alpha = 45^\circ$ y vale:

$$a_{max} = \frac{V_o^2}{g} \quad (63a)$$

Para el caso $V_o^2 = 2gh$ se tendrá:

$$a_{max} = 2h \quad (63b)$$

El alcance vertical se obtiene notando que en el punto X_b, Y_b , la tangente horizontal con el sistema de ejes elegidos da:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} \alpha = g \frac{X_b}{V_o^2}$$

de donde

$$X_b = \frac{V_o^2}{g} \operatorname{sen} \alpha$$

de la ecuación (61), se obtiene:

$$Y_b = \frac{g}{2} \frac{X_b^2}{V_o^2}$$

o sea, con el valor de X_b anterior:

$$Y_b = \frac{V_o^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Por otro lado, notando que:

$$b + Y_b = X_b \operatorname{sen} \alpha$$

se llega a

$$b = \frac{V_o^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \alpha \quad (64)$$

Si

$$V_o = \sqrt{2gh}$$

se tiene:

$$b = h \operatorname{sen}^2 \alpha \quad (64a)$$

Si el chorro ha sido largado verticalmente, $\alpha = 90^\circ$, y por lo tanto:

$$b = h \quad (64b)$$

Esta forma y dimensiones teóricas del chorro no se alcanzan en la práctica por la resistencia del aire que influye en función del ángulo y de la intensidad del viento. Y algo también influye la forma de la salida por la inversión de la vena que disminuye el alcance.

Para alcance de chorros verticales se dan expresiones sencillas. Si llamamos h la carga teórica inicial que, como se ha visto, es precisamente el alcance teórico de un chorro vertical y si denominamos h_1 el alcance efectivo, tenemos las expresiones experimentales siguientes:

$$\text{Mariotte} \quad \frac{h}{h_1} = 1 + 0,0103 h_1 \quad (65a)$$

$$\text{D'Aubuisson} \quad \frac{h_1}{h} = 1 - 0,01 h \quad (65b)$$

$$\text{Weisbach} \quad \frac{h}{h_1} = \alpha + \beta h + \gamma h^2 \quad (65c)$$

Según Weisbach las constantes α , β y γ dependen de la forma y dimensiones de la desembocadura según el cuadro siguiente:

FORMA	Diám.	α	β	γ
Orificio circular.....	0,01	1	0,01158	0,000582
Orificio circular.....	0,014	1	0,00778	0,000604
Orificio circular.....	0,025	1	0,00094	0,000228
Boquilla corta.....	0,01	1,027	0,00048	0,000956
Cono 8°—0,245 m. de longitud...	0,016	1,060	0,00529	0,000718
Cono 15°—0,14 m. de longitud.....	0,01	1,045	0,00037	0,000859
Cono 15°—0,11 m. de longitud.....	0,014	1,022	0,000239	0,000327

Freeman, experimentando en boquillas contra-incendio (1) los alcances de chorros, da, para el alcance vertical de las últimas gotas, la expresión.

$$b = h - 0,000113 \frac{h^2}{d} \tag{66}$$

en que h es la altura de velocidad inicial y d el diámetro. Esta expresión es válida para h comprendidos entre 28 y 49 metros y d entre 1,9 y 3,5 cm. Para distinguir los chorros compactos de los dispersos por la acción de la resistencia del aire, define como chorro eficaz al que, con los diámetros de boquillas indicados, no proyecta fuera de un círculo de 25 cm. de diámetro más del 25% del gasto. Sus experiencias para alcances verticales van resumidas en el cuadro siguiente:

RAZÓN ENTRE EL ALCANCE VERTICAL EFECTIVO b , Y LA CARGA ÚTIL h					
	Alcance vertical de las últimas gotas en aire quieto		Alcance vertical del chorro eficaz soplando brisa		
	19 mm.	35 mm.	19 mm.	35 mm.	
Para $h =$ (mts.)	5	0,86	0,92	0,74	0,80
	10	0,88	0,95	0,73	0,79
	15	0,88	0,93	0,735	0,775
	20	0,88	0,92	0,72	0,76
	30	0,84	0,92	0,54	0,61
	40	0,77	0,90	0,54	0,615
	50	0,72	0,86	0,47	0,56
	60	0,65	0,80	0,41	0,49
	70	0,59	0,71	0,35	0,44

(1) Proceedings of American Society of Civil Engineers (Nov. 1890).

Estas cifras revelan que se acentúa la disminución del alcance vertical para cargas superiores a 20 metros.

Respecto al alcance horizontal que, como se ha visto, es teóricamente máximo cuando el ángulo de inclinación inicial del chorro es de 45° y vale $a = 2h$, experimentado por Freeman con las mismas boquillas que el vertical, se encuentra que solamente corresponde al ángulo teórico si h es menor de 7 m. y que el ángulo más conveniente baja poco a poco hasta valer 32° para $h = 35$ metros. En el cuadro siguiente van los resultados experimentales de Freeman, tanto del alcance de las últimas gotas como del chorro eficaz:

RAZÓN ENTRE EL ALCANCE HORIZONTAL EFECTIVO a Y EL ALCANCE TEÓRICO MÁXIMO $2h$					
	Alcance horizontal de las últimas gotas en aire quieto		Alcance horizontal del chorro eficaz soplando brisa		
	19 mm.	35 mm.	19 mm.	35 mm.	
Diám. boquilla =	19 mm.	35 mm.	19 mm.	35 mm.	
$\frac{a}{2h}$ para $h =$	5	0,78	0,88	0,43	0,55
	10	0,78	0,87	0,35	0,48
	15	0,77	0,89	0,32	0,43
	20	0,72	0,86	0,27	0,40
	30	0,60	0,78	0,23	0,34
	40	0,52	0,69	0,20	0,29
	50	0,45	0,62	0,18	0,25
	60	0,41	0,56	0,16	0,23
	70	0,37	0,51	0,15	0,20

Se nota una disminución grande del alcance horizontal de las últimas gotas en cargas mayores de 20 metros.

EJEMPLO.—Con una boquilla de 2 cm. de diámetro se larga verticalmente un chorro cuya velocidad inicial es de 30 m/seg. Se desea saber hasta donde llega el chorro unido y el alcance de las últimas gotas.

La altura de velocidad es:

$$h = \frac{U^2}{2g} = 46 \text{ metros.}$$

Con este valor la expresión de Mariotte diría que el alcance vertical es de 34 metros. Las experiencias de Freeman, entrando a la tabla de valores, dan, para $h = 46$ y $d = 1,9$ cm. $b/h = 0,74$ para el alcance de las últimas gotas y $b/h = 0,5$ para el chorro eficaz. Por lo tanto, el alcance de las últimas gotas es de

$$b = 0,74 \times 46 = 34 \text{ metros.}$$

El chorro compacto sólo llega a la altura de 23 metros.

La expresión de D'Aubuisson habría dado un alcance de 25 m., en coincidencia con el alcance del chorro compacto de Freeman.

Notaremos finalmente que cualquier alteración en el extremo de la boquilla influye notablemente en estos alcances.

40. Influencia de la velocidad afuente.—Como se ha dicho anteriormente, cuando la velocidad inicial o *velocidad afuente* no es despreciable, también forma parte como sumando de H , Bernoulli en exceso sobre la cota piezométrica final.

Llamando Ω el área conocida por la que pasa el gasto aguas arriba del orificio, h y Q la carga y el gasto, la velocidad afuente sería Q/Ω . Si llamamos Q_1 el gasto que se obtendría despreciando la velocidad afuente, se tiene:

$$Q_1 = m \omega \sqrt{2gh}$$

pero el gasto verdadero, notando que la verdadera carga es $H = h + \alpha \frac{Q^2}{2g \Omega^2}$ es:

$$Q = m \omega \sqrt{2gh + \alpha \frac{Q^2}{\Omega^2}}$$

poniendo dentro del radical el gasto en función de la carga h (despreciando ahí el pequeño aumento debido a la velocidad afuente, tendremos:

$$Q = m \omega \sqrt{2gh \left(1 + \alpha \frac{m^2 \omega^2}{\Omega^2} \right)}$$

y

$$\frac{Q}{Q_1} = \left(1 + \alpha \frac{m^2 \omega^2}{\Omega^2} \right)^{1/2}$$

de donde, suprimiendo desde el tercer término del desarrollo, se tendrá, aproximadamente;

$$\frac{Q}{Q_1} = 1 + \frac{1}{2} \alpha \frac{m^2 \omega^2}{\Omega^2} \quad (67)$$

Además, introduciendo H , la suma de Bernoulli con la altura de velocidad afuente, se tiene:

$$\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \frac{Q}{Q_1}$$

Luego:

$$\frac{h}{H} = \frac{Q^2}{Q_1^2} = 1 + \alpha \frac{m^2 \omega^2}{\Omega^2} \quad (68)$$

El incremento de la carga y de los gastos por la velocidad afuente es proporcional al cuadrado de la razón de las áreas y a la mitad de este valor respectivamente.

Dentro del 1% de aproximación en los gastos se ha de prescindir de esta corrección cuando el área anterior al orificio es unas 10 veces mayor que el valor de m .

El área plana Ω ha de ser normal a las direcciones iniciales de los filetes paralelos entre sí; es generalmente horizontal en los depósitos y vertical en los canales.

Parece que la velocidad afuente debe ser reducida por cierta pérdida de carga cuando tiene diferente dirección que la vena, pero no se mencionan experiencias especiales para estudiarla.

41. Vaciamientos.—Tiene interés práctico el cálculo de vaciamentos o del tiempo que demora en vaciarse o llenarse un depósito dotado de un desagüe de contorno cerrado.

El caso más sencillo es el de depósitos que desaguan por un solo orificio y al aire libre o en una masa líquida de nivel constante.

El volumen escurrido en un tiempo elemental dt por el orificio de sección ω , cuya carga es h , se puede expresar por la fórmula

$$m \omega \sqrt{2g h} dt$$

y es igual al volumen Ωdh de que se vacia el estanque de sección Ω . Esto supone despreciar la impermanencia del escurrimiento en el tiempo dt . De aquí, notando que dt y dh son de distinto signo, resulta:

$$dt = - \frac{\Omega dh}{m \omega \sqrt{2g h}}$$

Integrando desde la altura inicial h_0 hasta la final h_1 , se obtiene el tiempo T de vaciamiento del depósito entre esas cargas. En esta integración se podrá considerar constante el coeficiente m , atribuyéndole, si es el caso, valores intermedios entre los que corresponden a las cargas extremas:

$$T = - \frac{\Omega}{m \omega \sqrt{2g}} \int_{h_0}^{h_1} \frac{dh}{\sqrt{h}} \quad (69)$$

Si no hay una definición analítica sencilla de Ω en función de h , se procederá al cálculo exacto o aproximado de diferentes valores de $\frac{\Omega}{\sqrt{h}}$ y mediante su término medio aritmético o por la fórmula de Simpson, o gráficamente se podrá obtener la integral arriba indicada.

Si se trata de depósitos prismáticos, Ω es constante y el gasto medio de vaciamiento es la sem-suma del gasto inicial y final

$$T = \frac{\Omega}{m \sqrt{2g}} (2\sqrt{h_0} - 2\sqrt{h_1}) \quad (70)$$

o en otras palabras el tiempo del vaciamiento de un depósito de sección constante se puede obtener calculando con el gasto medio aritmético en vez del gasto efectivo variable.

$$T = \frac{\Omega (h_0 - h_1)}{\frac{1}{2} (m \omega \sqrt{2g} h_0 + m \omega \sqrt{2g} h_1)}$$

En conos invertidos de base Ω_0 que desaguan al aire libre y cuyo vértice está en el orificio:

$$\Omega = \Omega_0 \frac{h^2}{h_0^2}$$

En paraboloides $\Omega = \Omega_0 \frac{h}{h_0}$

Reemplazando estas funciones e integrando se determina los vaciamientos de estos y otros cuerpos geométricos. Parece útil, para juzgar por comparación, indicar

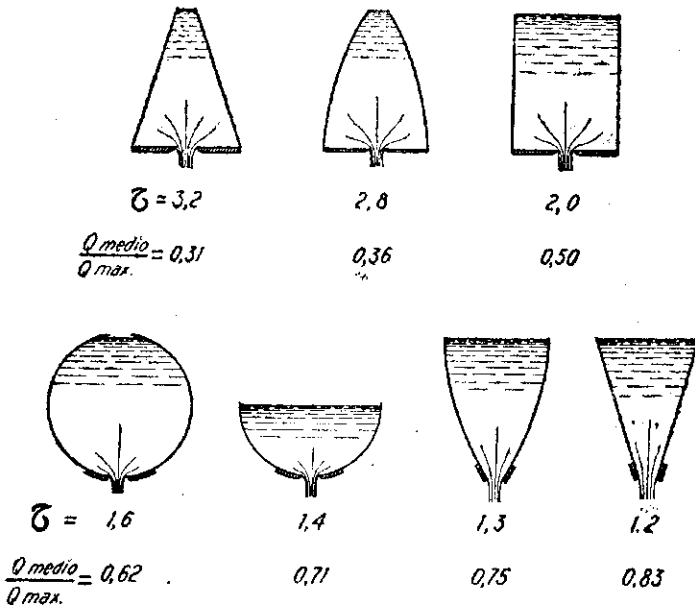


Fig. 90

en la Fig. 90 los valores de la razón τ entre el tiempo efectivo de vaciamiento y el que se obtendría si permaneciera constante el gasto inicial;

$$T = \frac{\frac{l}{m\omega\sqrt{2g}} \int_{h_0}^{h_1} \frac{\Omega}{\sqrt{h}} dh}{\frac{l}{m\omega\sqrt{2g h_0}} \int_{\Omega_0}^{\Omega} \Omega dh} \quad (71)$$

Esta razón es inversa de la que guardan el gasto medio durante el vaciamiento y el gasto máximo.

General es el caso de dos depósitos en comunicación por un orificio sumergido, como el de la Fig. 91, cuyas secciones Ω_a y Ω_b son funciones de las distancias verticales al orificio: x_a y x_b .

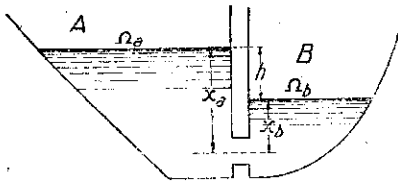


Fig. 91

La constancia de los volúmenes de agua contenidos en los depósitos establece la siguiente relación entre x_a y x_b , designando por V_0 la suma de los volúmenes, descontadas las cavidades inferiores

res al orificio:

$$\int_0^{x_a} \Omega_a dx_a + \int_0^{x_b} \Omega_b dx_b = V_0 \quad (72)$$

La consideración del volúmen elemental escurrido permite establecer, como en el caso anterior:

$$T = - \frac{l}{m\omega\sqrt{2gh}} \int_{x_{a2}}^{x_{a1}} \frac{\Omega_a}{\sqrt{x_a - x_b}} dx_a \quad (73)$$

en que x_b es la función indicada (72, de x_a y x_{a1} y x_{a2} los valores extremos de x_a . Cuando uno de los depósitos, el B por ejemplo, es de área infinita, se cae en el caso anterior, pues x_b es constante y se tiene:

$$x_a - x_b = h \quad dx_a = dh$$

En depósitos comunicados, de área constante, se tiene, designando por h la diferencia de niveles,

$$(\Omega_a - \Omega_b) x_a - \Omega_b h = V_0 \quad (74)$$

$$dx_a = \frac{\Omega_b}{\Omega_a + \Omega_b} dh$$

y por lo tanto:

$$T = - \frac{l}{m \omega \sqrt{2g}} \frac{\Omega_a \Omega_b}{\Omega_a + \Omega_b} \int_{h_0}^{h_1} \frac{dh}{\sqrt{h}} \quad (75)$$

Otros casos, como los vaciamentos de depósitos que reciban además una alimentación, o los orificios múltiples, son distintos problemas analíticos análogos en que no intervienen nuevas bases hidráulicas.

TABLA N.º 4

COEFICIENTES EXPERIMENTALES DE GASTO EN ORIFICIOS DE PARED DELGADA RECTANGULARES—CONTRACCIÓN COMPLETA

(Poncelet y Lesbros)

Carga en m.	CANTO AFILADO						Pared de 5 cm.	
	ancho del orificio 0,20 m.						ancho 0,60 m	
	alto del orificio en m.						alto del orificio	
	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	0,20	0,02	0,20
0,01	0,702	0,660	0,634	0,607			0,644	
0,03	0,689	0,659	0,640	0,620	0,600	0,578	0,642	0,593
0,05	0,680	0,658	0,640	0,625	0,605	0,585	0,641	0,597
0,07	0,674	0,657	0,638	0,627	0,609	0,583	0,640	0,600
0,10	0,667	0,655	0,637	0,630	0,611	0,592	0,639	0,602
0,20	0,655	0,649	0,634	0,631	0,615	0,598	0,635	0,605
0,30	0,650	0,645	0,632	0,630	0,616	0,600	0,633	0,607
0,40	0,646	0,642	0,631	0,629	0,617	0,602	0,631	0,607
0,50	0,643	0,640	0,631	0,628	0,617	0,603	0,630	0,607
0,60	0,641	0,638	0,630	0,627	0,617	0,604	0,629	0,607
0,70	0,638	0,637	0,629	0,627	0,616	0,604	0,628	0,607
0,80	0,635	0,635	0,628	0,626	0,616	0,605	0,628	0,606
0,90	0,632	0,634	0,627	0,625	0,615	0,605	0,627	0,606
1,00	0,629	0,632	0,627	0,625	0,615	0,605	0,626	0,605
1,50	0,617	0,620	0,621	0,619	0,611	0,602	0,623	0,602
2,00	0,613	0,613	0,613	0,613	0,607	0,601	0,620	0,602
3,00	0,609	0,608	0,607	0,606	0,603	0,601	0,615	0,601

TABLA N.º 5

COEFICIENTES EXPERIMENTALES DE GASTO EN ORIFICIOS DE PARED DELGADA.
CONTRACCIÓN COMPLETA. ORIFICIOS CIRCULARES.

(Según Hamilton Smith, 1886)

Carga sobre centro en m.	Diámetro del orificio en mts.					
	0,006	0,015	0,030	0,060	0,180	0,300
0,12		0,631	0,618			
0,15		0,627	0,615	0,600	0,592	
0,18	0,655	0,624	0,613	0,601	0,593	
0,21	0,651	0,622	0,611	0,601	0,594	0,590
0,24	0,648	0,620	0,610	0,601	0,594	0,591
0,27	0,646	0,618	0,609	0,601	0,595	0,591
0,30	0,644	0,617	0,608	0,600	0,595	0,591
0,40	0,638	0,613	0,605	0,600	0,596	0,593
0,60	0,632	0,610	0,604	0,599	0,597	0,595
0,90	0,627	0,606	0,603	0,599	0,597	0,597
1,20	0,623	0,605	0,602	0,599	0,598	0,596
1,80	0,618	0,604	0,600	0,598	0,597	0,596
2,40	0,614	0,603	0,600	0,598	0,596	0,596
3,00	0,611	0,601	0,598	0,597	0,596	0,595
6,00	0,601	0,598	0,596	0,596	0,596	0,594
30,00	0,593	0,592	0,592	0,592	0,592	0,592

TABLA N.º 6

COEFICIENTES DE GASTO EN ORIFICIOS DE PARED DELGADA CIRCULARES.
CONTRACCIÓN COMPLETA.

(Bilton, 1907)

Carga sobre el centro en mts.	Diámetro del orificio en mts.								
	0,0006	0,0013	0,0025	0,0051	0,0076	0,0100	0,013	0,015	0,019
0,15	0,748	0,722	0,690	0,673	0,665	0,652	0,645	0,644	0,632
0,30	0,748	0,717	0,680	0,659	0,647	0,636	0,630	0,627	0,618
0,60	0,748	0,708	0,666	0,642	0,630	0,624	0,621	0,618	0,613
1,25	0,748	0,697	0,652	0,630	0,627	0,624	0,621	0,618	0,613
1,80	0,748	0,688	0,647	0,630	0,627	0,624	0,621	0,618	0,613
2,20		0,683	0,645	0,630	0,627	0,624	0,621	0,618	0,613

(PARA DIÁMETROS MAYORES DE 0,025 M.)

Carga sobre el centro en mts.	Diámetro del orificio en mts.			
	0,025	0,038	0,051	0,063 y más
0,075	0,640			
0,15	0,626	0,618	0,612	0,610
0,25	0,619	0,612	0,606	0,604
0,30	0,612	0,606	0,601	0,600
0,45	0,608	0,603	0,599	0,598
0,50	0,608	0,603	0,599	0,598
0,55	0,608	0,603	0,599	0,598
1,15 y más	0,068	0,603	0,599	0,598

TABLA N.º 7

COEFICIENTES EXPERIMENTALES DE GASTO EN ORIFICIOS DE RARED DELGADA, SUMERCIDOS. CONTRACCIÓN COMPLETA.

Hamilton Smith (1886) — Ellis — (1876) — Stewart (1903)

(En la columna de las dimensiones, *d* significa diámetro, *a* altura si es rectángulo o lado si es cuadrado, *b* base del rectángulo)

Forma	Dimens. (mts.)	Carga en metros							
		0,10	0,15	0,30	0,60	1,20	2	3	5
Circular	d = 0,15		0,599	0,597	0,595	0,595			
Circular	d = 0,03	0,600	0,600	0,600	0,599	0,598			
Cuadrado	a = ,015		0,609	0,607	0,605	0,604			
Cuadrado	a = 0,03	0,607	0,605	0,604	0,603	0,604			
Rectang.	b = 0,9 a = 0,015		0,621			0,620	0,620	0,618	
Circular	d = 0,3				0,608	0,602	0,603	0,602	0,601
Cuadrado	a = 0,3				0,601	0,601	0,603	0,605	0,606
Cuadrado	a = 1,2	0,614							

TABLA N.º 8

COEFICIENTES EXPERIMENTALES DE GASTO EN ORIFICIOS DE PARED DELGADA.
CONCENTRACIÓN SUPRIMIDA EN PARTE.

(Poncelet y Lesbros)

Orificios cuadrados de 0,20 de lado

Carga sobre el centro de grav. (mts.)	Contracción suprimida en:				
	el fondo	un lado	los dos lados	fondo y un lado	fondo y dos lados
0,15	0,616	0,600	0,641	0,643	0,648
0,20	0,618	0,601	0,639	0,637	0,670
0,25	0,623	0,602	0,639	0,637	0,695
0,30	0,622	0,605	0,640	0,637	0,690
0,40	0,623	0,608	0,635	0,637	0,683
0,50	0,624	0,609	0,635	0,637	0,678
0,75	0,624	0,610	0,633	0,637	0,672
1,00	0,624	0,611	0,630	0,637	0,669
1,5	0,623	0,610	0,629	0,637	0,664
2,0	0,619	0,609	0,627	0,636	0,661
3,0	0,615	0,607	0,623	0,633	0,658

TABLA N.º 9

COEFICIENTES EXPERIMENTALES DE GASTO EN ORIFICIOS DE PARED DELGADA.
CONTRACCIÓN SUPRIMIDA EN PARTE.

(Poncelet y Lesbros)

Orificios rectangulares de 0,2 de ancho y 0,1 de alto

Carga sobre el centro de gravedad	Contracción suprimida en				
	el fondo	un lado	los dos lados	el fondo y en un lado	el fondo y dos lados
0,10	0,646	0,643	0,652	0,665	0,743
0,15	0,648	0,638	0,647	0,661	0,707
0,20	0,649	0,636	0,643	0,660	0,697
0,25	0,649	0,634	0,641	0,659	0,691
0,30	0,649	0,634	0,638	0,659	0,680
0,40	0,649	0,633	0,636	0,658	0,680
0,50	0,648	0,633	0,634	0,657	0,679
0,75	0,648	0,632	0,633	0,656	0,676
1,00	0,647	0,628	0,631	0,656	0,674
1,5	0,644	0,622	0,630	0,654	0,671
2,0	0,641	0,618	0,629	0,652	0,669
3,0	0,636	0,611	0,625	0,648	0,664

TABLA N° 10

COEFICIENTES EXPERIMENTALES DE GASTO EN TUBOS DE LONGITUD VARIABLE
CON CONTRACCIÓN SUPRIMIDA EN PARTE.

Stewart (1908) y Rogers y Smith (1916)

Los tubos de Stewart eran cuadrados de 1,22 de lado y longitudes variables entre 0,09 m. y 4,27 m. con pequeñas cargas hasta de 0,10 m.

Los de Rogers & Smith eran cuadrados de 0,15 — 0,2 — 0,25 m. de lado y con cargas que llegaron a 0,67 m.

L es la longitud del tubo y D la magnitud del lado

$\frac{L}{D}$	Forma de entrada				
	Contracción completa	Contracción suprimida en el fondo	Contracción suprimida en el fondo y un lado	Contracción suprimida en el fondo y dos lados	Contracción totalmente suprimida
0,10	0,61	0,63	0,68	0,77	0,95
0,15	0,62	0,64	0,68	0,77	0,94
0,30	0,65	0,66	0,69	0,74	0,93
0,50	0,67	0,68	0,70	0,72	0,93
0,80	0,74	0,73	0,74	0,73	0,92
1,00	0,78	0,75	0,77	0,80	0,91
1,50	0,79	0,79	0,80	0,84	0,90
2,00	0,80	0,80	0,81	0,85	0,90
3,00	0,80	0,80	0,81	0,85	0,90
4,00	0,80	0,81	0,82	0,85	0,90

CAPITULO VI

Singularidades en contorno abierto

Vertederos

42. Generalidades sobre vertederos.—43. Vertederos en pared delgada, napa libre, sin contracción lateral. Velocidad y presión de la vena contraída en vertederos de ancho indefinido.—44. Velocidad inicial.—45. Coeficientes experimentales de gasto. Ejemplo.—46. Contracción lateral. Ejemplo.—47. Vertederos triangulares.—48. Vertederos trapeciales.—49. Las singularidades en contorno abierto y el régimen del canal en que están situadas. Caso especial del vertedero. 50. Vertedero de pared delgada de otras formas de napas.—51. Coeficientes experimentales y módulos de gasto. Ejemplo.—52. Vertederos en pared gruesa, de entrada redondeada y arista viva sin influencia de aguas abajo y sin velocidad inicial.—53. Velocidad inicial. Ejemplo.—54. Paredes gruesas influenciadas por aguas abajo.—55. Paredes intermedias no influenciadas e influenciadas por aguas abajo. Ejemplo.—56. Vertederos en pared gruesa con contracción lateral. Ejemplo.—57. Vertederos en barreras inclinadas y redondeadas.—58. Otras circunstancias en el escurrimiento por vertederos: Vertederos oblicuos.—59. Vertederos laterales. Ejemplos.—60. Vertederos curvos.

42. Generalidades de Vertederos.—Empezaremos a estudiar en este capítulo las singularidades del escurrimiento con superficie libre, es decir, las de contorno abierto que se definieron en el capítulo III § 14, pág. 29 y en capítulo V § 29. Puede decirse que el tipo de esta singularidad es el vertedero o rebalse, que es el escurrimiento que se verifica sobre una barrera. Al estudio del vertedero dedicaremos este capítulo.

Los vertederos pueden ser de cualquier forma definida por la sección mojada. Los más usados son los rectangulares, triangulares y trapeciales

Si la napa toca en una sola arista de la barrera o pared, el vertedero se llama

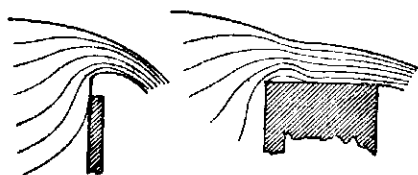


Fig. 92

vertedero en *pared delgada*. Por el contrario, se llama en *pared gruesa*, si la toca en un plano. La arista, generalmente horizontal, o plano a que se adhiere la napa se llama la cresta o umbral del vertedero. Según esto se dice vertedero en cresta delgada o cresta gruesa. (Fig. 92).

Se llama *largo del vertedero* la longitud L entre las paredes laterales, verticales o inclinadas que lo limitan; en este último caso el *largo* se cuenta en la base del trapecio que forma la sección transversal. (Fig. 93).

El vertedero triangular queda definido por el ángulo.

Un vertedero puede ser vertical o inclinado, según sean los paramentos de la barrera que lo origina; esa inclinación, principalmente en las paredes delgadas, se

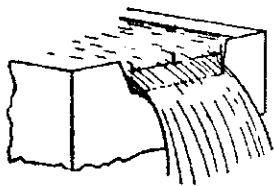


Fig. 93

mide por el ángulo que forma la vertical con el paramento de la barrera. Se toma positivo cuando la inclinación es hacia aguas arriba y negativo si es hacia aguas abajo. Según esto la inclinación $i = -\frac{\pi}{2}$ es lo que se llama vulgarmente una caída (Fig. 94).

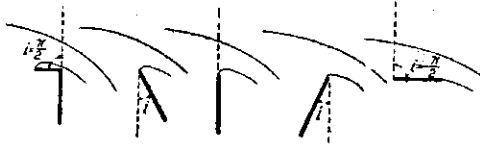


Fig. 94

Muy usados en rebalses de tranques son los umbrales redondeados, o paramentos curvos que facilitan el escurrimiento.

Si el nivel de aguas abajo es superior al de la cresta del vertedero se le llama sumergido o incompleto (Fig. 95). Se llama completo en el caso contrario. También se ha solido llamar ahogado el vertedero en las condiciones primeramente enunciadas. En adelante se usará esta denominación únicamente para el caso en que el nivel de aguas abajo influya sobre el de aguas arriba del umbral, pudiendo esto producirse aunque el nivel de aguas abajo sea inferior al de la cresta y no producirse, según ciertas circunstancias que estudiaremos.

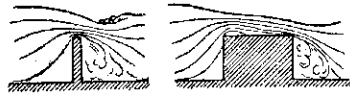


Fig. 95

En una sección AB (Fig. 96), aguas arriba de la barrera, pero suficientemente alejada de ella, toda la sección participa del escurrimiento. En ella rige la ley hidrostática, pues los filetes medio-locales son paralelos. En otras secciones más cercanas a la barrera, tal como CD por ejemplo, existe junto al fondo, líquido muerto animado de movimientos impermanentes. Por lo tanto, la velocidad media en CD ha de ser mayor que la de AB . Aceptando la constancia de la suma de Bernoulli de la corriente y la coincidencia de la cota piezométrica con el eje hidráulico, dada la pequeñez de la velocidad, se explica la depresión que éste sufre en las cercanías de la barrera.

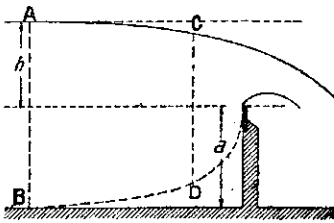


Fig. 96

Se puede trazar en líneas generales, siguiendo a Grialou (1), la trayectoria límite del movimiento sensible, tal que BDO , tangente al fondo en B y a la pared de la barrera algo más abajo del nivel de la cresta (Fig. 96) y relativamente tanto más abajo, cuanto menor es la altura de la barrera y mayor la inclinación del paramento hacia aguas abajo (2).

Se llama carga del vertedero la altura de agua sobre el nivel de la cresta, medida en la sección AB en que rige la ley hidrostática. Se le designa con la letra h (Fig. 96). En rigor, no es h la carga efectiva, pues a la profundidad hay que agre-

(1) Grialou, Cours d'Hidraulique, Paris 1916 (Pág. 490).

(2) Estas trayectorias han sido observadas por medio de bolitas brillantes, que impresionan su estela en una placa fotográfica, por Camichel en el Laboratorio de Tolosa, Francia, en 1928.

gar: $\alpha \frac{U_o^2}{2g}$ altura media de velocidad, en la práctica no siempre despreciable. Llamaremos H a la suma de Bernoulli de aguas arriba sobre el nivel de la cresta:

$$H = h + \alpha \frac{U_o^2}{2g}$$

La experiencia demuestra que la depresión de la superficie libre, en general, es despreciable más allá de una distancia de $4h$ aguas arriba de la barrera, y es, como observa Forchheimer, apenas de 3% de h , como término medio, a una distancia $3h$. Sin embargo, es fácil darse cuenta que la depresión superficial, dependiendo de la altura a de aguas arriba de la barrera y de su inclinación, está íntimamente ligada en su extensión a las condiciones del vertedero. Hay también que observar que para medir la carga no conviene alejarse demasiado de la barrera, pues se la puede falsear debido a la pendiente general del eje hidráulico.

Los filetes inferiores de la napa, que aguas arriba de la barrera escurren unidos a la pared, ocasionan la contracción, como en los orificios, siempre que no se cuide de redondear las aristas de entrada. Si hay arista viva, existe, pues, contracción en la parte inferior y en los lados. Puede la contracción ser también imperfecta o incompleta como en los orificios y puede faltar totalmente en los lados, siendo completa en la parte inferior, como sucede comúnmente en barreras colocadas en canales. La contracción origina una pérdida de carga en paredes gruesas. En estas, el espacio inferior a la contracción, como en ciertas formas de napas en paredes delgadas, se llena de agua animada de movimiento impermanente, (figs. 92 y 95), en forma de torbellino de eje horizontal, que se observa en el Laboratorio introduciendo corpúsculos que son tomados por el movimiento giratorio antes de ser arrasados por la corriente.

43. Vertederos en pared delgada sin contracción lateral. Napa libre.—Velocidad y presión en la vena contraída en vertederos de ancho indefinido.—Si la presión generalmente atmosférica que obra sobre la napa, obra también bajo ella, se forma la napa que llamó Bazin, *libre* y que antes había sido prolijamente experimentada por Francis y Steley y Stearns. De los vertederos en pared delgada el más sencillo es el vertical, de contracción lateral suprimida y en el que hay una distribución uniforme de velocidades en todo el ancho, para poder considerar el fenómeno por unidad de ancho.

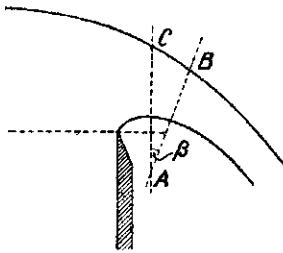


Fig. 97

En un vertedero de estas condiciones parece aceptable, a primera vista, que en toda la sección de la vena contraída reine la presión que la rodea, como se acepta en la vena contraída que sale de un orificio; pero, por efecto de la curvatura de filetes, y, como experimentalmente se comprueba, hay un exceso de presión en el interior de la napa. Aceptaremos, para emprender el estudio del vertedero vertical de napa libre, las hipótesis intuitivas siguientes, debidas a Boussinesq: 1.º la sección AB (fig. 97) de la napa, que forma

con la vertical AC que pasa por el punto más alto del peralte del filete inferior, un ángulo pequeño, cuyo coseno es prácticamente la unidad, es atravesada por filetes cuyas trayectorias son concéntricas; y 2.º la Naturaleza se arregla en sus factores: espesor de la napa contraída y velocidades, para escurrir el mayor gasto posible dada la carga disponible o, lo que es lo mismo, la Naturaleza escurre el gasto dado, arreglándose de manera que la carga, o suma de Bernoulli, sea un mínimo.

La primera hipótesis es poco real, pero es sencilla para hacer intervenir la curvatura de filetes y la segunda se puede justificar con las consideraciones siguientes: supongamos que sobre una barrera, primitivamente, no haya escurrimiento, lo que supone que aguas arriba y abajo de ella hay un mismo nivel libre H . Consideremos que se baja el nivel de aguas abajo; la napa escurrirá con un cierto espesor sobre el umbral, espesor variable con el nivel de aguas abajo. La velocidad de escurrimiento crece con el desnivel $H - h_1$ (fig. 98) y, por lo tanto, con el $H - H_1$, o sea, $Q = f_1 (H - h_1) = f_2 (H - H_1)$.

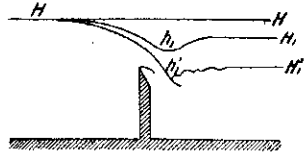


Fig. 98

El gasto, primitivamente nulo cuando no había desnivel, crece con éste hasta que descendiendo suficientemente el nivel H_1 de aguas abajo, no influya ni en el espesor de la napa, ni en la repartición de presiones en ella. Desde entonces no influye en el gasto, y, según lo dicho, las derivadas dQ/dh_1 y dQ/dH_1 que eran positivas se han anulado y, por lo tanto, Q se ha hecho un máximo. Este raciocinio se puede generalizar a cualquiera forma de napa y a cualquiera forma de umbral.

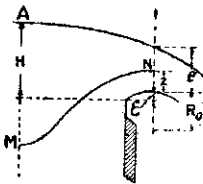


Fig. 99

Supuestas estas hipótesis, apliquemos el teorema de Bernoulli a una molécula en su trayectoria, desde una sección A (fig. 99) donde empieza la depresión superficial y son paralelos aun los filetes hasta la napa contraída, en la sección en que las trayectorias son concéntricas, suponiendo muy alta la barrera para que la velocidad afluyente sea despreciable. Si tomamos como plano de referencia al horizontal que pasa por la cresta y suponemos vertical la sección contraída que contiene al eje OZ , el teorema dice:

$$H = \epsilon + z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \quad (1)$$

siendo ϵ el peralte del filete inferior, z la cota de la trayectoria sobre ese peralte, p la presión y u la velocidad de la molécula en la napa contraída.

La ecuación general de la Hidrodinámica referida al eje OZ aplicada a la molécula en el punto de cota z es:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dz} = -g + \frac{u^2}{R}$$

si llamamos R el radio de curvatura de la trayectoria en N . En virtud de la hipótesis de concenricidad aceptada: $R = R_0 + z$ (fig. 99), y, por lo tanto:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dz} = -g + \frac{u^2}{R_0 + z} \quad (2)$$

Derivando respecto a z la ecuación (1 de Bernoulli, se obtiene:

$$1 + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dz} + \frac{u}{g} \frac{du}{dz} = 0$$

ecuación que multiplicada por g y despejando $\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dz}$ es:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dz} = -g - u \frac{du}{dz} \quad (3)$$

Igualando las ecuaciones (2 y (3 obtenemos:

$$\frac{u}{R_0 + z} = -\frac{du}{dz}$$

Separando variables e integrando indefinidamente, se llega a:

$$\begin{aligned} \log(R_0 + z) + \log u &= Cte. \\ (R_0 + z) u &= Cte. \end{aligned} \quad (4)$$

Llamando u_0 la velocidad del filete inferior y u_1 la del superior, equivale a poner:

$$u_0 R_0 = u_1 (R_0 + e) = u (R_0 + z) \quad (5)$$

Introduciendo un parámetro $k = \frac{u_1}{u_0}$ se obtiene de la ecuación (5):

$$k = \frac{R_0}{R_0 + e} \quad (6)$$

de donde se deduce:

$$R_0 = \frac{ek}{1 - k} \quad (6a)$$

El teorema de Bernoulli, aplicado al filete inferior y superior, respectivamente, notando que p/γ es nulo en ambos casos, por ser la napa libre, es:

$$\left. \begin{aligned} H &= \varepsilon + \frac{u_0^2}{2g}; \text{ de donde: } u_0 = \sqrt{2g(H - \varepsilon)} \\ H &= \varepsilon + e + \frac{u_1^2}{2g}; \text{ de donde: } u_1 = \sqrt{2g(H - \varepsilon - e)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Introduciendo estos valores y el de R_o de (6a, en la ecuación (5), obtenemos:

$$\frac{ek}{1-k} \sqrt{2g(H-\epsilon)} = \left(\frac{ek}{1-k} + e \right) \sqrt{2g(H-\epsilon-e)}$$

ecuación que nos da las relaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} e &= (H - \epsilon) (1 - k^2) \\ R_o &= k (H - \epsilon) (1 + k) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Obtenidas estas relaciones entre los elementos de la sección contraída, que son deducidos de la hipótesis de concentricidad, estudiaremos el gasto que escurre sobre la barrera. El filete que pasa por N tiene un gasto elemental por unidad de ancho, $dq = u dz$. El gasto total por unidad de ancho será la integral:

$$q = \int_0^e u dz. \quad (9)$$

Reemplazando aquí el valor de u_o deducido de la ecuación (5), obtendremos:

$$\begin{aligned} q &= u_o R_o \int_0^e \frac{dz}{R_o + z} \\ q &= u_o R_o \log h. \frac{R_o + e}{R_o} \end{aligned} \quad (9a)$$

ecuación en que si se sustituye u_o por su valor dado por (7), R_o por el dado por la segunda de las relaciones (8) y notando que: $\frac{R_o + e}{R_o} = \frac{1}{k}$

queda:

$$q = \sqrt{2g} (H - \epsilon)^{\frac{3}{2}} k (1 + k) \log h. \frac{1}{k}$$

expresión que dividida y multiplicada por $H^{\frac{3}{2}}$ resulta:

$$q = \left(1 - \frac{\epsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}} k (1 + k) \log h. \frac{1}{k} H \sqrt{2gH} \quad (9)$$

Se tiene el coeficiente numérico de gasto:

$$m = \left(1 - \frac{\epsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}} k (1 + k) \log h. \frac{1}{k} \quad (9a)$$

que ha de ser máximo, según la segunda hipótesis, para que el gasto lo sea. En el primer factor de m aparece la contracción inferior; si se prescinde provisoriamente de las variaciones de este primer factor, extremando los demás factores que forman el coeficiente: $k(1+k) \log h \cdot \frac{1}{k}$ y se iguala a cero la derivada, se obtiene:

$$\log h \cdot \frac{1}{k} - 1 + 2k \log h \cdot \frac{1}{k} - k = 0$$

se satisface la ecuación para $k = 0,4685$, lo que nos da para estos factores el valor:

$$k(1+k) \log h \cdot \frac{1}{k} = 0,5216 \quad (10)$$

Se puede calcular la contracción en función de k en el vertedero entrante, disposición teórica análoga al tubo de Borda, suponiendo en seguida que ella varía linealmente con el ángulo, según la ley que expresa la relación:

$$\frac{\epsilon}{H} = \frac{\epsilon_e}{H} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \right) \quad (11)$$

en que ϵ_e es el peralte del filete inferior en el vertedero entrante y ϵ el correspondiente en un vertedero inclinado de un ángulo i con la vertical. Con esta ecuación se obtiene efectivamente en el vertedero vertical ($i = 0$), $\frac{\epsilon}{H} = \frac{\epsilon_e}{2H}$ y en la pared gruesa o catarata ($i = -\frac{\pi}{2}$), $\frac{\epsilon}{H} = 0$.

El cálculo de ϵ_e se efectúa aplicando en el vertedero entrante dispuesto en forma análoga al tubo de Borda, el teorema de las cantidades de movimiento a la masa líquida comprendida entre la sección AA (fig. 100) y la sección de la napa contraída de peralte máximo, sección vertical en que las trayectorias son concéntricas. Para la aplicación del teorema se puede suponer que el descenso de presión en la vecindad de la cresta no llega al punto C, es decir que en la cara CD rige la ley hidrostática correspondiente al nivel libre A. Se elige como eje de proyecciones uno horizontal y se calcula el incremento de las cantidades de movimiento que corresponde a la masa del gasto en la unidad de tiempo. La masa que en la unidad de tiempo entra y sale de

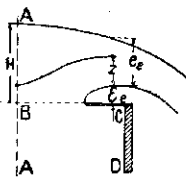


Fig. 100

los límites fijados y por unidad de ancho de un filete es: $\frac{\gamma}{g} u dz$. Si notamos que la velocidad del filete en AA es despreciable y que en la sección de la vena contraída vale u , el incremento por unidad de tiempo de su cantidad de movimiento será: $\frac{\gamma}{g} u^2 dz$. El incremento total por unidad de tiempo de las cantidades de movimiento correspondiente a la masa que entra por AA y sale por la napa con-

traída es por consiguiente: $\frac{\gamma}{g} \int_0^e u^2 dz$. El resto de la masa no varía de velocidad. De las fuerzas que obran, las que dan proyecciones sobre el eje elegido son, si descontamos la presión atmosférica, y suponemos despreciables los frotamientos, las presiones en las caras terminales y en la cara CD . En la cara AA la presión sobre el trozo inferior BA es igual y de sentido contrario a la de la pared CD . Queda como saldo la presión en el trozo superior AB , que por unidad de ancho vale: $\frac{\gamma H^2}{2}$. En la napa contraída, la resultante de las presiones será: $-\int p dz$, siendo p la de un punto cualquiera de ordenada z . El teorema dice:

$$\frac{\gamma}{g} \int_0^{e_e} u^2 dz = \frac{\gamma l^2}{2} - \int_0^{e_e} p dz \tag{12}$$

De la ecuación (1, aplicada al vertedero entrante se desprende:

$$p = \gamma (H - \epsilon_e - z - \frac{u^2}{2g})$$

Introduciendo este valor de p en la ecuación anterior y dividiendo por γ , se tiene:

$$\frac{l}{g} \int_0^{e_e} u^2 dz = \frac{H}{2} - H \int_0^{e_e} dz + \epsilon_e \int_0^{e_e} dz + \int_0^{e_e} z dz + \frac{l}{2g} \int_0^{e_e} u^2 dz$$

Simplificando, ejecutando y reemplazando el valor de u^2 por $u_o^2 \frac{R_o^2}{(R_o + z)^2}$ y finalmente el de u_o^2 por el deducido de la ecuación de Bernoulli: $u_o^2 = 2g(H - \epsilon_e)$, se tiene:

$$(H - \epsilon_e) R_o^2 \int_0^{e_e} \frac{dz}{(R_o + z)^2} = \frac{H}{2} - \epsilon_e (H - \epsilon_e) + \frac{e_e^2}{2}$$

Dividiendo por H^2 , ejecutando reemplazado los valores de R_o y de ϵ_e por los dados por las ecuaciones (8), y despejando se obtiene en el vertedero entrante, como valor del factor de cuyas variaciones se había prescindido provisionalmente, el siguiente:

$$\left(1 - \frac{\epsilon_e}{H}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{l}{(l+k)^{\frac{3}{2}} (l-k)^{\frac{3}{2}}} \tag{13}$$

Este factor se hace máximo con el valor de k que hace mínima la expresión $(l+k)^{\frac{3}{2}} (l-k)^{\frac{3}{2}}$, que es $k=0,5$; por lo tanto, con el valor $k=0,4685$, que hace máxi-

mo el otro factor de m , sus variaciones son efectivamente despreciables, como provisoriamente se había supuesto.

El valor $k=0,4685$, o sea, prácticamente, $0,5$ da para $\frac{e_c}{H}$ el valor $0,2302$ y para el coeficiente de gasto del vertedero entrante:

$$m = (1 - 0,2302)^{\frac{3}{2}} \times 0,5216 = 0,352 \quad (14)$$

Por analogía, según Boussinesq, se prescinde también de las variaciones del primer factor en vertederos de cualquier inclinación y se obtiene, por lo tanto, como coeficiente de gasto:

$$m = \left[1 - 0,2302 \left(\frac{l}{2} + \frac{i}{\pi} \right) \right]^{\frac{3}{2}} \times 0,5216 \quad (15)$$

En el vertedero vertical sería:

$$m = (1 - 0,1151)^{\frac{3}{2}} \times 0,5216 = 0,4342 \quad (16)$$

que es el valor del coeficiente calculado por Boussinesq, con un número de cifras que excede realmente lo que permiten las aproximaciones aceptadas para el cálculo.

La teoría de Boussinesq debe su éxito a la coincidencia de sus resultados en el vertedero vertical de napa libre con la experimentación de Bazin; ella, que fué extendida por su autor a las napas no libres, necesita, para abordar el problema, recurrir en esos casos a los valores empíricos de las presiones que obran debajo de la napa, de modo que más lógico parece tomar sencillamente, sin complicaciones inútiles, directamente los coeficientes experimentales. La variación lineal de la contracción con el ángulo, dista bastante de la realidad. El vertedero de napa libre de ángulo $-\frac{\pi}{2}$ puede equivaler a la pared gruesa, pues así como en el vertedero

entrante $i = \frac{\pi}{2}$ es necesaria una barrera con paramento vertical, también podemos suponerla en el otro caso extremo; el coeficiente que se obtiene aplicando la teoría ($m=0,5216$), se aleja mucho del valor teórico que sentaremos después y de los experimentales que coinciden con éste.

Los autores modernos, aun los franceses, reducen su exposición al vertedero de napa libre, como lo hemos hecho (1).

A continuación va una comparación entre los elementos que se pueden calcular por medio de la teoría de Boussinesq y las experiencias de Bazin, partiendo como

(1) Mouret.—Cours d'hydraulique Générale, 1922, pág. 610. Eydoux.—Hydraulique, página 258. Forchheimer.—Hydraulik, 1914, pág. 303. Spataro.—Idraulica teorica e sperimentale, tomo II, pág. 1094. Los autores norteamericanos no la mencionan, como King, Merriman, Russell; solamente Hughes y Safford la expone suscitadamente, (pág. 193). Ninguno de los autores citados le dedica más de tres páginas.

se ha visto en el vertedero vertical con $\frac{\epsilon}{H} = 0,115$ y $k = 0,4685$. Para $\frac{\epsilon}{H}$ de Bazin en la napa libre, el valor experimental $\frac{\epsilon}{H} = 0,112$.

$$\text{Espesor de la napa} \begin{cases} \text{Boussinesq } \frac{\epsilon}{H} = (1 - 0,115) (1 - 0,4685^2) = 0,690 \\ \text{Bazin } \frac{\epsilon}{H} = 0,668 \end{cases}$$

Velocidad y presión en el interior de la napa contraída:

$\frac{z}{e}$	=	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.00
$\frac{z}{H}$	=	0	0.069	0.138	0.207	0.276	0.345	0.414	0.483	0.552	0.621	0.690
$\frac{U^2}{2gH}$	{	Boussinesq = 0.885	0.715	0.589	0.494	0.419	0.360	0.313	0.275	0.244	0.220	0.195
		Bazin = 0.885	0.731	0.606	0.520	0.444	0.400	0.360	0.326	0.287	0.270	0.246
$\frac{P}{\gamma h}$	{	Boussinesq = 0.0	0.101	0.158	0.184	0.190	0.180	0.158	0.127	0.089	0.044	0.00
		Bazin = 0.0	0.098	0.159	0.180	0.182	0.170	0.145	0.114	0.084	0.042	0.00

44. Velocidad inicial.—En vertederos de ancho igual o comparable al del canal o estanque de aducción, se puede despreciar la *velocidad inicial*, solamente cuando la altura de la barrera es muy grande con respecto a la carga. La velocidad inicial disminuye la contracción inferior, como lo demuestran las experiencias de Bazin que dieron para la razón ϵ/H los valores siguientes, en función de a/h , si a es la altura de aguas arriba del vertedero:

$\frac{a}{h}$	=	1	2	3	4	5
$\frac{\epsilon}{H}$	=	0,096	0,103	0,106	0,109	0,110

La introducción de la velocidad en el teorema de las cantidades de movimiento, aplicado al vertedero entrante para calcular la contracción, da resultados complicados; por eso se hace el siguiente raciocinio, más sencillo, aunque menos racional: La carga H es, como se ha dicho, la suma de la carga mensurable h y la altura media de velocidad inicial $U_o^2/2g$; introduciendo estos valores en la ecuación (13, se obtiene:

$$q = 0,434 \left(h + \frac{U_o^2}{2g} \right) \sqrt{2g \left(h + \frac{U_o^2}{2g} \right)} \tag{17}$$

o sea:

$$q = 0,434 \left(1 + \alpha \frac{U_o^2}{2gh} \right)^{\frac{3}{2}} h \sqrt{2gh}$$

el coeficiente de gasto que toma en cuenta la velocidad inicial y lo da en función de la carga mensurable es, según esto:

$$m = 0,434 \left(1 + \alpha \frac{U_0^2}{2gh} \right)^{\frac{3}{2}}$$

expresión en que:

$$U_0 = \frac{q}{h+a} = \frac{mh\sqrt{2gh}}{h+a}$$

aproximadamente con $m = 0,45$ da:

$$U_0 = \frac{0,45 h^{\frac{3}{2}} \sqrt{2g}}{h+a}$$

Por consiguiente:

$$m = 0,434 \left(1 + 0,2 \alpha \frac{h^2}{(h+a)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (18a)$$

Desarrollando la potencia del paréntesis y tomando en cuenta solamente los dos primeros términos obtenemos:

$$m = 0,434 \left(1 + \frac{3}{2} 0,2 \alpha \frac{h^2}{(h+a)^2} \right) \quad (18b)$$

El coeficiente α depende de las condiciones de aguas arriba de la barrera. Será poco diferente de la unidad si esas condiciones originan un río deprimido y diferirá mucho de ese valor, si uno peraltado. De modo que en rigor no se le puede asignar un valor único. El caso corriente es que, por efecto de la barrera, se origine un río peraltado, en el cual las aceleraciones negativas de velocidad crean la gran desigualdad de velocidades; tal es el caso de las experiencias de Bazin y Steley y Stearns, que dan al valor medio $\alpha = 1,6$ y las consideraciones analíticas de Boussinesq que conducen al valor $\alpha = 1,57$. Aceptaremos, pues, con la salvedad indicada, $\alpha = 1,6$.

Redondeando cifras se obtiene finalmente:

$$m = 0,434 + 0,21 \frac{h^2}{(h+a)^2} \quad (19)$$

(Continuará).