

Transformación del cálculo gráfico de la viga continua, en cálculo por medio de abacos.

(Conclusión)

4.º LAS ORDENADAS DE APOYO DE LAS LÍNEAS CRUZADAS

Veamos ahora algunos casos que ofrecen cierta simplificación para encontrar estas ordenadas, cuyos valores son:

$$A = \frac{W_p}{l^2} y \quad \text{y} \quad B = \frac{W_p}{l^2} z$$

a) *En el caso de carga uniforme*

La superficie de momentos es una parábola cuyo centro de gravedad queda en el centro del tramo en carga

$$y = z = \frac{l}{2}$$

con lo que vemos que las dos ordenadas de apoyo son iguales.

El valor de W_p es

$$W_p = \frac{2}{3} l p \frac{l^2}{8} = p \frac{l^3}{12}$$

y el valor de A es

$$A = \frac{\frac{p l^3}{12}}{l^2} \frac{l}{2} = p \frac{l^2}{4}$$

b) En el caso de carga aislada

La superficie de momentos es un triángulo.

Supongamos la carga aplicada a una distancia m del apoyo A (fig. 10).

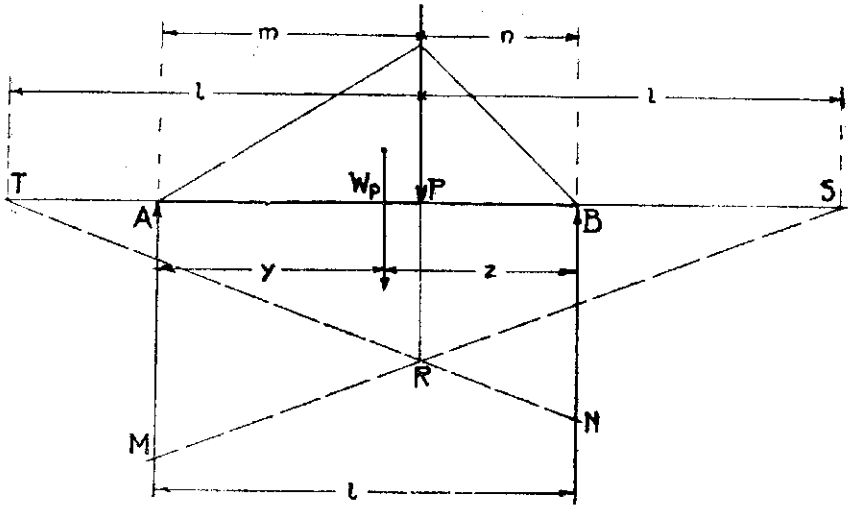


Fig. 10

El centro de gravedad de este triángulo dista del apoyo A de una longitud y tal que

$$y = \frac{1}{3} (l + m)$$

$$z = \frac{1}{3} (l + n)$$

La superficie de este triángulo es

$$W_p = \frac{1}{2} l P \frac{mn}{l}$$

El valor de la ordenada A es

$$A = \frac{1}{2} l P \frac{mn}{l} \frac{l+m}{3} \frac{6}{l^2}$$

$$A = P \frac{mn}{l} \frac{l+m}{l}$$

análogamente B es

$$B = P \frac{mn}{l} \frac{l+n}{l}$$

Para encontrar estos valores se puede hacer la construcción gráfica siguiente. Prolonguemos el eje de la viga y marquemos a ambos lados del punto de aplicación de la carga la luz del tramo y llevemos sobre una vertical a plomo de ésta, el valor del momento que ella produce. Unamos el punto R con S y con T y prolonguemos hasta obtener los puntos M y N.

AM y BN son iguales a A y a B respectivamente.

En efecto, de los triángulos semejantes obtenemos

$$\frac{AM}{PR} = \frac{l+m}{l} \quad \frac{BN}{PR} = \frac{l+n}{l}$$

y como

$$PR = P \frac{mn}{l}$$

$$AM = P \frac{mn}{l} \frac{l+m}{l} = A$$

$$BN = P \frac{mn}{l} \frac{l+n}{l} = B$$

c) *En el caso de una sollicitación cualquiera*

Para calcular los momentos en los apoyos, se puede asimilar este caso al de cargas concentradas.

Sea W el valor de la superficie de momentos positivos y a y b las distancias del centro de gravedad de ésta a los apoyos del tramo.

Los valores de las ordenadas de apoyos son:

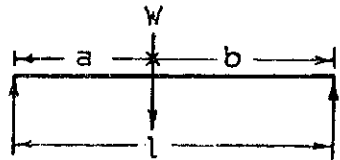


fig. 11

$$A = \frac{W a}{\frac{l^2}{6}} \quad B = \frac{W b}{\frac{l^2}{6}}$$

en el caso de carga concentrada

$$A = P \frac{mn}{l} \frac{l+m}{l} \quad B = P \frac{mn}{l} \frac{l+n}{l}$$

siendo m y n las distancias de la carga a los apoyos.

Veamos qué valores de P, m y n producen las mismas ordenadas de apoyo.

Igualando los valores de A y B obtenemos

$$6 W a = P m n (l+m)$$

$$6 W b = P m n (l+n)$$

de donde

$$\frac{a}{b} = \frac{l+m}{l+n}$$

reemplazando

$$\begin{aligned} a &= \alpha l & b &= \beta l \\ m &= \mu l & n &= \nu l \\ W &= Ml \end{aligned}$$

y teniendo presente que

$$\alpha + \beta = 1 \quad \mu + \nu = 1$$

tenemos

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 + \mu}{2 - \mu}$$

de donde

$$\begin{aligned} \mu &= 3\alpha - 1 \\ \nu &= 2 - 3\alpha \\ 6M\alpha l^2 &= P\mu\nu(1 + \mu)l^3 \end{aligned}$$

pero como

$$1 + \mu = 3\alpha$$

queda

$$Pl = \frac{2M}{\mu\nu}$$

o sea

$$Pl = \frac{2M}{(3\alpha - 1)(2 - 3\alpha)}$$

Resumiendo. Una sollicitación cualquiera que produzca una área de momentos positivos igual a $W=Ml$, cuyo centro de gravedad diste de los apoyos αl y βl respectivamente, es equivalente para calcular los momentos que ella produce en los apoyos a una fuerza concentrada P , cuyo valor cumpla la relación siguiente:

$$Pl = \frac{2M}{(3\alpha - 1)(2 - 3\alpha)}$$

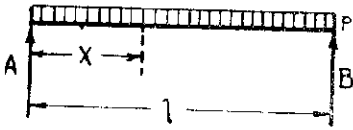
y cuyas distancias a los apoyos sean

$$\begin{aligned} \mu l \text{ y } \nu l &\text{ tales que} \\ \mu &= 3\alpha - 1 \\ \nu &= 2 - 3\alpha \end{aligned}$$

Para los casos de: dos cargas concentradas iguales; carga uniforme o triangular en parte del tramo y momento en el tramo, se han confeccionado tablas que facilitan mucho el cálculo.

1.º LOS NÚMEROS ω

a). Carga uniforme



$$A=B=\frac{pl}{2}$$

El momento en el punto x es

$$M_x = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} = \frac{p}{2}x(l-x)$$

llamando $\xi = \frac{x}{l}$

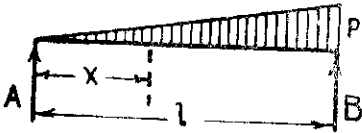
$$M_x = \frac{pl^2}{2}\xi(1-\xi)$$

El valor $\xi(1-\xi)$ se llama corrientemente ω_R .

El valor de la superficie de momentos es

$$W = \frac{pl^3}{12}$$

b). Carga triangular



$$A = \frac{pl}{6} \quad B = \frac{pl}{3}$$

El momento en el punto x es

$$M_x = \frac{pl}{6}x - \frac{p_x x^2}{6}$$

pero $p_x = \frac{p}{l}x$

$$M_x = \frac{p}{6}x \left(l - \frac{x^2}{l} \right)$$

y llamando $\xi = \frac{x}{l}$

ξ	ω_R	ω_D
0.0	0.0	0.0
0.05	0.0475	0.049875
0.1	0.09	0.099
0.15	0.1275	0.146625
0.2	0.16	0.192
0.25	0.1875	0.234375
0.3	0.21	0.273
0.35	0.2275	0.307125
0.4	0.24	0.336
0.45	0.2475	0.358875
0.5	0.25	0.375
0.55	0.2475	0.383625
0.6	0.24	0.384
0.65	0.2275	0.375375
0.7	0.21	0.357
0.75	0.1875	0.328125
0.8	0.16	0.288
0.85	0.1275	0.235875
0.9	0.09	0.171
0.95	0.0475	0.092625
1.0	0.0	0.0

$$M_x = \frac{pl^2}{6}\xi(1-\xi^2)$$

El valor $\xi(1-\xi^2)$ se llama generalmente ω_D .

El momento máximo es

$$M = \frac{pl^2}{9\sqrt{3}}$$

y se produce a la distancia

$$\frac{l}{\sqrt{3}}$$

del apoyo A.

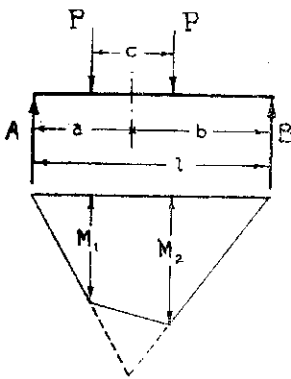
El valor de la Sup. de Momentos es

$$W = \frac{pl^3}{24}$$

y su centro de gravedad dis-

ta $\frac{8}{15}l$ del apoyo A.

2.º DOS CARGAS CONCENTRADAS IGUALES



$$\alpha = \frac{a}{l}; \beta = \frac{b}{l}; \gamma = \frac{c}{l}$$

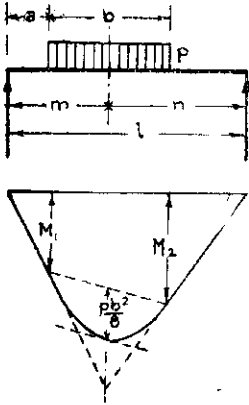
$$M_1 = Pl\beta(2\alpha - \gamma) = PlK_1$$

$$M_2 = Pl\alpha(2\beta - \gamma) = PlK_2$$

Este caso se puede asimilar para calcular los momentos en los apoyos al caso de una carga concentrada única, cuyo valor P_u cumpla la relación $P_u l = K_3 Pl$ y cuyo punto de aplicación está a la distancia $\eta' l$ del apoyo A.

α	γ	K_1	K_2	K_3	η'
0.2	0.1	0.24	0.30	1.90	0.209
	0.2	0.16	0.28	1.59	0.252
0.3	0.1	0.35	0.39	1.96	0.305
	0.2	0.28	0.36	1.84	0.320
	0.3	0.21	0.33	1.67	0.341
0.4	0.4	0.14	0.30	1.42	0.395
	0.1	0.42	0.44	1.98	0.401
	0.2	0.36	0.40	1.91	0.407
	0.3	0.30	0.36	1.78	0.422
	0.4	0.24	0.32	1.62	0.440
0.5	0.5	0.18	0.28	1.43	0.470
	0.6	0.12	0.24	1.20	0.521
	0.1	0.45	0.45	1.98	0.500
	0.2	0.40	0.40	1.92	0.500
	0.3	0.35	0.35	1.82	0.500
	0.4	0.30	0.30	1.68	0.500
	0.5	0.25	0.25	1.50	0.500
	0.6	0.20	0.20	1.28	0.500
0.7	0.15	0.15	1.02	0.500	
	0.8	0.10	0.10	0.72	0.500

3.° CARGA UNIFORME EN PARTE DEL TRAMO



$$\alpha = \frac{a}{l} ; \beta = \frac{b}{l} ; \mu = \frac{m}{l} ; \nu = \frac{n}{l}$$

$$M_1 = p l^2 \beta \nu \left(\mu - \frac{\beta}{2} \right) = p l^2 K_1$$

$$M_2 = p l^2 \beta \mu \left(\nu - \frac{\beta}{2} \right) = p l^2 K_2$$

En este caso se procede en igual forma que en el anterior

$$P l = K_3 p l^2$$

El punto de aplicación de \$P\$ está a la distancia \$\eta' l\$ del apoyo A.

\$\alpha\$	\$\beta\$	\$K_1\$	\$K_2\$	\$K_3\$	\$\eta'\$
0.0	0.1	0.0	0.0045	0.0751	0.0665
	0.2	0.0	0.0160	0.152	0.131
	0.3	0.0	0.0315	0.231	0.194
	0.4	0.0	0.0480	0.310	0.254
	0.5	0.0	0.0625	0.388	0.311
	0.6	0.0	0.0720	0.464	0.368
	0.7	0.0	0.0735	0.538	0.416
	0.8	0.0	0.0640	0.602	0.458
	0.9	0.0	0.0405	0.648	0.485
0.1	0.1	0.0085	0.0120	0.097	0.155
	0.2	0.0160	0.0280	0.186	0.212
	0.3	0.0225	0.0450	0.274	0.269
	0.4	0.0280	0.0600	0.358	0.326
	0.5	0.0325	0.0700	0.438	0.380
	0.6	0.0360	0.0720	0.514	0.428
	0.7	0.0385	0.0630	0.579	0.470
	0.8	0.0400	0.0400	0.629	0.500
	0.2	0.1	0.0150	0.0175	0.0992
0.2		0.0280	0.0360	0.194	0.308
0.3		0.0390	0.0525	0.285	0.362
0.4		0.0480	0.0640	0.374	0.413
0.5		0.0550	0.0675	0.456	0.458
0.6		0.0600	0.0600	0.528	0.500
0.3	0.1	0.0195	0.0210	0.0993	0.353
	0.2	0.0360	0.0400	0.197	0.402
	0.3	0.0495	0.0540	0.290	0.452
	0.4	0.0600	0.0600	0.379	0.500
0.4	0.1	0.0220	0.0225	0.0995	0.499
	0.2	0.0400	0.0400	0.1972	0.500
0.45	0.1	0.0225	0.0225	0.0996	0.500

4.º CARGA TRIANGULAR EN PARTE DEL TRAMO

$$\alpha = \frac{a}{l}; \beta = \frac{b}{l}; \mu = \frac{m}{l}; \nu = \frac{n}{l}$$

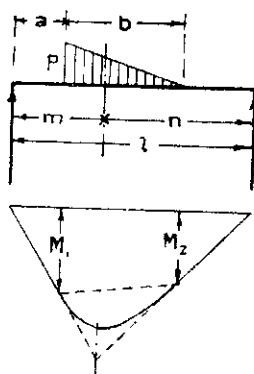
$$M_1 = p l^2 \beta \nu \left(\mu - \frac{2\beta}{3} \right) = p l^2 K_1$$

$$M_2 = p l^2 \beta \mu \left(\nu - \frac{2\beta}{3} \right) = p l^2 K_2$$

Como en el caso anterior

$$Pl = K_3 p l^2$$

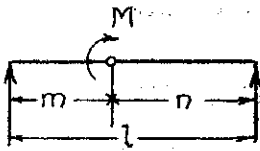
El punto de aplicación de P está a la distancia $\eta' l$ del apoyo A.



α	β	K_1	K_2	K_3	η'
0.0	0.1	0.0	0.0015	0.0333	0.050
	0.2	0.0	0.00533	0.06795	0.098
	0.3	0.0	0.0105	0.1040	0.143
	0.4	0.0	0.016	0.1395	0.188
	0.5	0.0	0.02083	0.1745	0.233
	0.6	0.0	0.024	0.2105	0.275
	0.7	0.0	0.0245	0.2470	0.311
	0.8	0.0	0.02133	0.2835	0.344
	0.9	0.0	0.0135	0.3170	0.374
	1.0	0.0	0.0	0.3472	0.400
0.1	0.1	0.00433	0.00533	0.0485	0.1376
	0.2	0.00833	0.01166	0.0922	0.179
	0.3	0.012	0.018	0.1365	0.218
	0.4	0.01533	0.02333	0.1778	0.258
	0.5	0.01833	0.02666	0.2175	0.296
	0.6	0.021	0.027	0.2572	0.332
	0.7	0.02333	0.02333	0.2939	0.365
	0.8	0.02533	0.01466	0.3291	0.395
	0.9	0.027	0.0	0.3600	0.419
0.2	0.1	0.00766	0.008166	0.0503	0.230
	0.2	0.01466	0.016	0.0992	0.266
	0.3	0.021	0.0225	0.1450	0.305
	0.4	0.02666	0.02666	0.1903	0.341

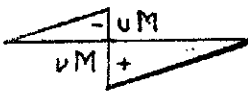
α	β	K_1	K_2	K_3	η'
0.3	0.5	0.03166	0.0275	0.2335	0.374
	0.6	0.036	0.024	0.2727	0.410
	0.7	0.03966	0.015666	0.3110	0.434
	0.8	0.04266	0.0	0.3435	0.458
	0.1	0.010	0.010	0.0500	0.332
	0.2	0.019	0.01833	0.0993	0.366
	0.3	0.027	0.024	0.1468	0.402
	0.4	0.034	0.026	0.1925	0.434
0.4	0.5	0.040	0.02333	0.2380	0.464
	0.6	0.045	0.015	0.2761	0.491
	0.7	0.049	0.0	0.3110	0.515
	0.1	0.01133	0.010833	0.0449	0.4325
	0.2	0.02133	0.018666	0.0993	0.464
	0.3	0.030	0.0225	0.1471	0.497
	0.4	0.03733	0.021333	0.1928	0.527
	0.5	0.04333	0.014166	0.2344	0.554
0.5	0.6	0.048	0.0	0.2695	0.575
	0.1	0.01166	0.01066	0.0498	0.530
	0.2	0.02166	0.017	0.0990	0.562
	0.3	0.030	0.018	0.1462	0.596
	0.4	0.03666	0.01266	0.1905	0.623
0.6	0.5	0.04166	0.0	0.2255	0.638
	0.1	0.011	0.0095	0.0498	0.632
	0.2	0.020	0.0133	0.0988	0.659
	0.3	0.027	0.0105	0.1429	0.688
	0.4	0.032	0.0	0.1805	0.707
0.7	0.1	0.00933	0.00733	0.0489	0.725
	0.2	0.01633	0.00766	0.0957	0.755
	0.3	0.021	0.0	0.1345	0.778
0.8	0.1	0.00666	0.004166	0.0475	0.824
	0.2	0.01066	0.0	0.0878	0.848
0.9	0.1	0.003	0.0	0.0433	0.923

5.º MOMENTO EN EL TRAMO

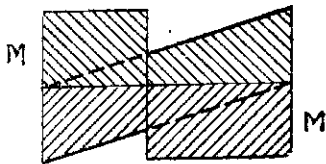


$$\mu = \frac{m}{l} \quad \nu = \frac{n}{l}$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{l} \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{l}$$



En este caso habrá dos superficies de momentos, una positiva y otra negativa, como se ve en la figura del lado, cada una de estas puede ser representada por una fuerza concentrada.



Los valores de éstas cumplen las relaciones siguientes:

$$P_1 l = K_1 M \quad P_2 l = K_2 M$$

y los puntos de aplicación de éstas distan del apoyo A, $\alpha_1 l$ y $\alpha_2 l$ respectivamente.

μ	ν	$P_1 l$	α_1	$P_2 l$	α_2
0	1.0	∞	1	8.00	0.500
0.1	0.9	5.71	0.704	7.96	0.507
0.2	0.8	5.48	0.547	7.85	0.523
0.3	0.7	6.06	0.467	7.70	0.543
0.4	0.6	6.66	0.434	7.48	0.561
0.5	0.5	7.14	0.428	7.14	0.572
0.6	0.4	7.48	0.439	6.66	0.566
0.7	0.3	7.70	0.457	6.06	0.533
0.8	0.2	7.85	0.477	5.48	0.453
0.9	0.1	7.96	0.493	5.71	0.296
1	0	8.00	0.500	∞	0

III

El sistema de Ritter puesto en abacos

1. • ECUACIÓN QUE LIGA A LOS PUNTOS FIJOS, Y ABACO PARA DETERMINARLOS

Como ya hemos visto, la construcción gráfica, que hay que hacer para obtener un punto fijo conocido el anterior, es la que se ve más abajo.

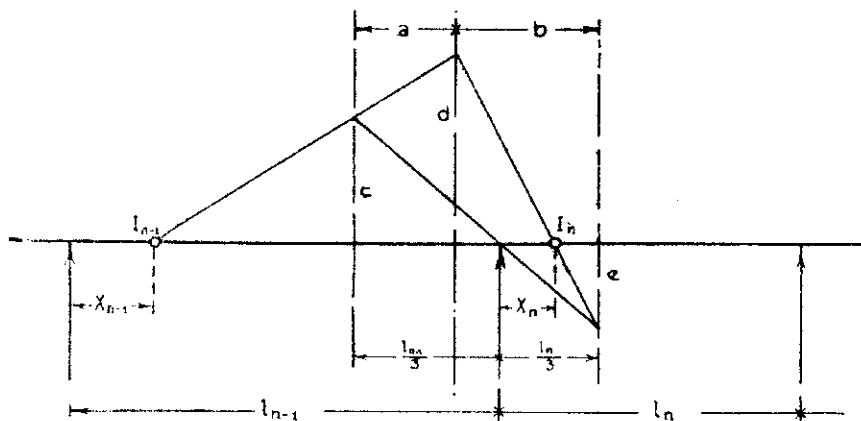


Fig. 12

Observando los triángulos semejantes que en ella hay, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{c}{e} = \frac{l_{n-1}}{l_n} \qquad \frac{c}{d} = \frac{\frac{2}{3} l_{n-1} - x_{n-1}}{\frac{2}{3} l_{n-1} + a - x_{n-1}}$$

$$\frac{d}{e} = \frac{b - \left(\frac{l_n}{3} - x_n\right)}{\frac{l_n}{3} - x_n}$$

además sabemos que,

$$\frac{a}{b} = \frac{l_n J_{n-1}}{l_{n-1} J_n} \qquad a + b = \frac{l_{n-1}}{3} + \frac{l_n}{3}$$

y designando por

$$\lambda = \frac{l_n}{l_{n-1}} \qquad J = \frac{J_n}{J_{n-1}}$$

$$x_n = \xi_n l_n \qquad x_{n-1} = \xi_{n-1} l_{n-1}$$

obtenemos después de combinar estas ecuaciones el valor de ξ_n en función del de ξ_{n-1} .

$$\xi_n = \frac{(1 - \xi_{n-1}) \frac{\lambda}{J}}{3 \left(\frac{\lambda}{J} + 1 \right) (1 - \xi_{n-1}) - 1}$$

Esta ecuación es susceptible de ponerse en un abaco. Haciendo la siguiente separación de variables.

$$z = 1 - \xi_{n-1}$$

$$\frac{z}{y} = \xi_n$$

se obtuvo el determinante que representa la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 - \xi_{n-1} \\ 1 & -\xi_n & 0 \\ 3 \left(\frac{\lambda}{J} + 1 \right) & -\frac{\lambda}{J} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Se multiplicó éste por otro de coeficientes indeterminados, los que se determinaron para que el abaco tuviera la forma más apropiada.

Los valores de las abscisas y ordenadas para los diferentes valores de las variables son:

	ξ_{n-1}	$\frac{\lambda}{J}$	ξ_n
X	0	$\frac{30 \frac{\lambda}{J}}{\frac{\lambda}{J} + 1}$	$90 \xi_n$
Y	$30 \xi_{n-1}$	$\frac{20}{\frac{\lambda}{J} + 1}$	$30 - 90 \xi_n$

2.° ECUACIÓN QUE DA EL COEFICIENTE DE MOMENTO EN UN APOYO DEBIDO A UNA CARGA UNIFORME Y ABACO PARA DETERMINARLOS

La construcción gráfica para obtener los momentos de apoyo es la que se ve en la figura.

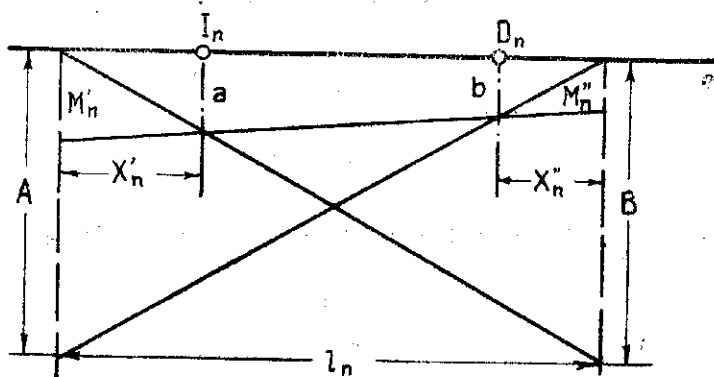


Fig. 13

De los triángulos semejantes obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{A}{b} = \frac{l_n}{x_n''} \quad \frac{B}{a} = \frac{l_n}{x_n'}$$

y el valor de M'_n es

$$M'_n = a + \frac{a - b}{l_n - x_n' - x_n''} x_n'$$

además sabemos que

$$A = B = \frac{\rho l_n^2}{4}$$

con estas ecuaciones y substituyendo

$$x_n' = \xi_n' l_n$$

$$x_n'' = \xi_n'' l_n$$

obtenemos el valor de M'_n

$$M'_n = \frac{p l_n^2}{4 \frac{(1 - \xi'_n - \xi''_n)}{\xi'_n (1 - 2 \xi''_n)}} = \frac{p l_n^2}{K'_n}$$

siendo

$$K'_n = \frac{4}{\xi'_n} \frac{1 - \xi'_n - \xi''_n}{1 - 2 \xi''_n}$$

El valor de esta constante K'_n se puede calcular por medio de un abaco. La separación de variables es

$$\frac{1 - \xi''_n}{\xi'_n} = y \quad 1 - 2 \xi''_n = z$$

El determinante que representa a la ecuación es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -0.25 K'_n & 1 \\ 0 & 1 & 1 - 2 \xi''_n \\ \xi'_n & -0.5 & 0.5 \end{vmatrix} = 0$$

el cual después de modificado nos da los valores de las abcisas y ordenadas para los diferentes valores de las variables.

	ξ'_n	K'_n	ξ''_n
X	$30 - 90 \xi'_n$	$4 - 30 \frac{1}{K'_n}$	$30 \xi''_n$
Y	$90 \xi'_n$	$\frac{180}{K'_n}$	0

3.º) ECUACIÓN QUE DA EL COEFICIENTE PARA EL MOMENTO EN UN APOYO DEBIDO A UNA CARGA CONCENTRADA Y ABACO PARA DETERMINARLO

La construcción gráfica es la siguiente:

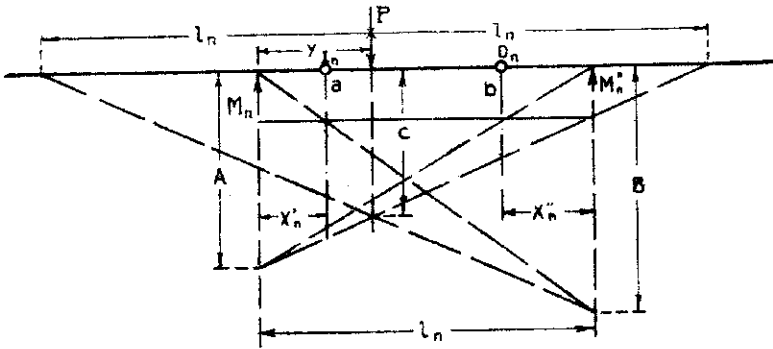


fig. 14.

De los triángulos semejantes obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{A}{b} = \frac{l_n}{x''_n} \quad \frac{B}{a} = \frac{l_n}{x'_n} \quad \frac{A}{c} = \frac{l_n + y}{l_n} \quad \frac{B}{c} = \frac{2l_n - y}{l_n}$$

además

$$M'_n = a + \frac{a - b}{l_n - x'_n - x''_n} x'_n$$

y

$$c = P \frac{(l_n - y) y}{l_n}$$

y reemplazando

$$y = \eta'_n l_n \quad x'_n = \xi'_n l_n \quad x''_n = \xi''_n l_n$$

obtenemos combinando estas ecuaciones el valor de M'_n

$$M'_n = \frac{P l_n}{\frac{1 - \xi'_n - \xi''_n}{\eta'_n (1 - \eta'_n) \xi'_n (2 - 3 \xi''_n - \eta'_n)}} = \frac{P l_n}{H_i}$$

transformando este valor H_i se obtiene

$$H_i = \frac{4 (1 - \xi'_n - \xi''_n)}{\xi'_n (1 - 2 \xi''_n)} \times \frac{1 - 2 \xi''_n}{4 (1 - \eta'_n) \eta'_n (2 - 3 \xi''_n - \eta'_n)}$$

El primer factor de este producto es el coeficiente que hemos obtenido para la carga uniforme. El coeficiente para una carga concentrada es igual al producto de éste por un nuevo factor que llamaremos H'_n

$$H'_n = \frac{1 - 2\xi''_n}{4(1 - \eta'_n)\eta'_n(2 - 3\xi''_n - \eta'_n)}$$

Para hacer el abaco de esta ecuación se hizo la siguiente separación de variables:

$$\frac{1 - 2\xi''_n}{H'_n} = y$$

$$\xi''_n = z$$

El determinante que representa a la ecuación es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} H'_n & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \xi''_n \\ 1 & 12(1 - \eta'_n)\eta'_n & 4(1 - \eta'_n)\eta'_n(2 - \eta'_n) \end{vmatrix} = 0$$

el cual después de modificado nos da los valores de las abcisas y ordenadas para los diferentes valores de las variables

	ξ''_n	H'_n	η'_n
X	0	$10H'_n$	$\frac{20}{12(1 - \eta'_n)\eta'_n}$
Y	$30\xi''_n$	$15 - 10H'_n$	$\frac{120(1 - \eta'_n)\eta'_n(2 - \eta'_n) - 20}{12(1 - \eta'_n)\eta'_n}$

4.° PROPAGACIÓN DE LOS MOMENTOS

Como hemos visto, el diagrama de momentos de un tramo sin carga de una viga continua que tiene un solo tramo cargado, es el de la figura 15

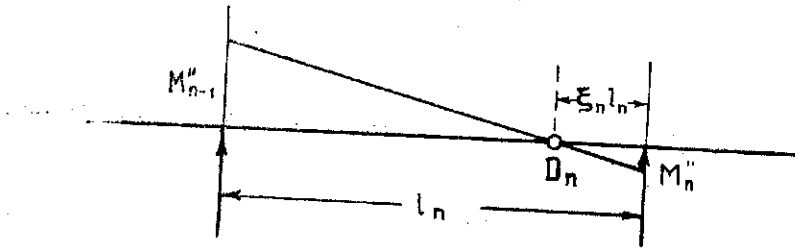


fig. 15

Conocido el momento M''_{n-1} , podemos conocer M''_n , puesto que

$$\frac{M''_n}{\xi''_n l_n} = \frac{M''_{n-1}}{l_n (1 - \xi''_n)}$$

de donde

$$M''_n = M''_{n-1} \frac{\xi''_n}{1 - \xi''_n}$$

Nosotros obtenemos los momentos en la forma

$$M''_{n-1} = \frac{Pl_m}{K}$$

entonces

$$M''_n = \frac{Pl_m}{K} \frac{\xi''_n}{1 - \xi''_n} = \frac{Pl_m}{K} \frac{1}{\frac{1 - \xi''_n}{\xi''_n}}$$

$$M''_n = \frac{Pl_m}{Kk}$$

siendo

$$k = \frac{1 - \xi''_n}{\xi''_n}$$

Los diferentes valores de k se han marcado al lado de la escala de ξ''_n en el primer abaco.