

Transformación del cálculo gráfico de la viga continua, en cálculo por medio de abacos.

SUMARIO:

Prólogo.

- I. El problema de la viga continua y los diferentes métodos para resolverlo.
 - 1.º El problema de la viga continua. 2.º Cálculo por medio del teorema de Clapeyron.
 - 3.º Cálculo por medio de aparatos. 4.º El método de los puntos fijos.
- II. El sistema gráfico de Ritter.
 - 1.º Los puntos fijos: a) En vigas de momento de inercia constante; b) En vigas de momento de inercia variable de un tramo a otro, pero constante en cada uno de ellos.
 - 2.º Método gráfico para determinar los puntos fijos: a) En vigas de momento de inercia constante; b) En vigas de momento de inercia variable de un tramo a otro, pero constante en cada uno de ellos. 3.º Las líneas cruzadas. 4.º Las ordenadas de apoyo de las líneas cruzadas.
- III. El sistema de Ritter puesto en abacos.
 - 1.º Ecuación que liga a los puntos fijos y abaco para determinarlos. 2.º Ecuación que da el coeficiente de momento en un apoyo debido a una carga uniforme y abaco para determinarlo. 3.º Ecuación que da el coeficiente para el momento en un apoyo, debido a una carga concentrada y abaco para determinarlo. 4.º Propagación de los momentos.-- Abacos para calcular vigas continuas y métodos para usarlos.

PROLOGO

Este trabajo fué originado por el empleo del cálculo gráfico de la viga continua que aparece en la obra de Kersten «Construcciones de hormigón armado». Después de numerosas aplicaciones de este método, pensé que el cálculo se facilitaría y se efectuaría en menor tiempo, reemplazando el complicado y fino dibujo por una serie de abacos que conseguí obtener al cabo de repetidos ensayos.

Una vez alcanzado esto, me interesé por conocer en qué se basaba el cálculo

gráfico que tantas veces había empleado. Ni en español ni en francés (1) encontré la explicación completa de este tema, y las que venían en obras alemanas que tratan sobre este punto, sea por dificultad de la traducción o por diferencia de mentalidad no me dejaron satisfecho. Por estas razones traté de hacer una exposición lógica de esta teoría que fuera semejante a la que supongo siguió el autor que la descubrió.

Al ver que autores como Kleinlogel ha editado recientemente un libro de 200 páginas para facilitar el cálculo de la viga continua, he creído que no estaría de más publicar este pequeño trabajo que tiene el mérito de ser original y cuya aplicación a los casos no tabulados puede competir muy ventajosamente con la de otros procedimientos.

PEDRO ERRÁZURIZ L.

I

El problema de la viga continua y los diferentes métodos para resolverlo

1.º EL PROBLEMA DE LA VIGA CONTINUA

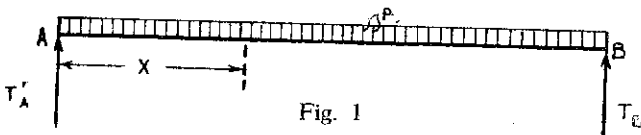
El problema del ingeniero consiste en determinar las diferentes secciones, (momentos de inercia) que debe tener una viga para que resulte lo más económica posible, ya que la economía es la ventaja de la viga continua sobre una serie de vigas apoyadas.

Para obtener los momentos de inercia, es necesario conocer los momentos flexionantes en cada punto de la viga, y estos a su vez, requieren el conocimiento de los primeros; de manera que el problema es indeterminado.

Los métodos que a continuación se indican, comienzan por suponer conocidas las relaciones entre los momentos de inercia y parten de ahí para calcular los momentos flexionantes y los esfuerzos de corte.

Ha quedado reducido nuestro problema, a calcular los momentos y esfuerzos de corte máximos, en cada punto de la viga, y aún se reduce más, pues como veremos, sólo es necesario conocer los momentos en los apoyos.

Supongamos un tramo de una viga continua (fig. 1); en sus extremos obran momentos M_A y M_B producidos por las cargas que existen en los tramos, sea p la carga uniforme que hay sobre AB y T'_A y T_B las reacciones de apoyo debido a esta carga.



El momento en un punto cualquiera de AB distante x del apoyo A es

(1) Después, he visto que la traducción española de la «Estática Gráfica» de O. Henkel, publicada por la Editorial Labor, trae una demostración bastante satisfactoria de este procedimiento.

$$M = M_A - T'_A x + \frac{px^2}{2} \quad (1)$$

haciendo $x=l$ obtenemos el momento en el apoyo B, en función del de A

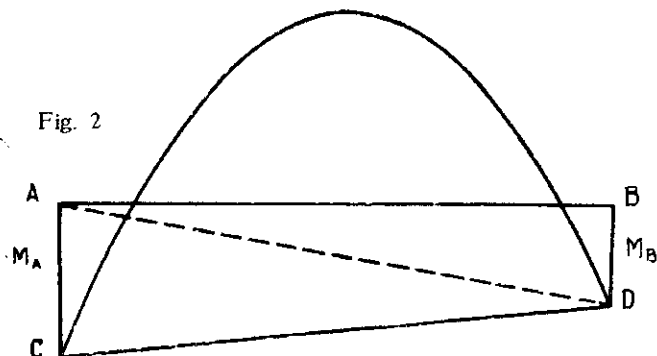
$$M_B = M_A - T'_A l + \frac{pl^2}{2} \quad (2)$$

despejando el valor de T'_A de esta ecuación, e introduciéndolo en la primera, obtenemos el momento en un punto cualquiera, en función de los momentos en los apoyos

$$M = M_A \frac{l-x}{l} + M_B \frac{x}{l} - \left(\frac{px^2}{2} - \frac{plx}{2} \right) \quad (3)$$

Esta ecuación tiene una representación gráfica muy sencilla, Observemos el término contenido en el paréntesis; es el valor del momento que se produce a la distancia x del apoyo A, de un tramo sobre el cual existe una carga uniforme p y que sus extremos están simplemente apoyados.

Marquemos los momentos M_A y M_B (fig. 2) y unamos sus extremos entre sí y con los apoyos.



Las ordenadas del triángulo ADC, quedan representadas por el primer término de la ecuación, y el segundo representa, las del triángulo BAD.

De manera que si marcamos a partir de la línea CD las ordenadas de la parábola de momentos del tramo, considerado como simplemente apoyado, obtenemos entre el eje de la viga y la curva que hemos dibujado, las ordenadas de momento del tramo de la viga continua.

De la ecuación (2) obtenemos el valor de

$$T'_A = \frac{M_A - M_B}{l} + \frac{pl}{2}$$

Con esto hemos demostrado lo que habíamos dicho, es decir, que el problema se reduce a calcular los momentos de apoyo.

2.º CÁLULO POR MEDIO DEL TEOREMA DE CLAPEYRON

Este método parte de la base de que el momento de inercia de cada tramo es constante, y consiste en resolver un sistema de ecuaciones, que relacionan los momentos flexionantes de tres apoyos sucesivos.

Este procedimiento, que es el que generalmente se emplea, tiene el inconveniente de exigir numerosos cálculos matemáticos, que están siempre expuestos a errores numéricos. Afortunadamente los casos más sencillos y corrientes, están tabulados.

3.º CÁLULO POR MEDIO DE APARATOS

Este procedimiento, que está basado en el Teorema de Maxwell, consiste en construir con la ayuda de ciertos aparatos, (Continostat, ideado por Gottschalk, Nupubest y otros) un modelo reducido de la estructura que se quiere calcular. Este modelo se puede construir con momentos de inercia variable o constante y para calcularlo, se miden las deformaciones que se producen, para las diferentes solicitaciones.

Tiene este procedimiento, la ventaja de que el momento de inercia puede variar en un mismo tramo, y que evita los largos y complicados cálculos numéricos que requiere el método anterior; pero también tiene un inconveniente, que es su elevado precio, lo que hace, que su uso sea poco frecuente.

4.º EL MÉTODO DE LOS PUNTOS FIJOS

Este sistema que fué descubierto por Ritter, y que ha tenido por origen el estudio gráfico de la elástica de una viga continua, de momento de inercia constante, consiste en obtener ciertos puntos fijos, dos para cada tramo; en uno de ellos, el de la derecha, el momento se anula cuando sólo hay cargas en los tramos que quedan hacia la izquierda del tramo considerado y en el de la izquierda se anula cuando sucede lo contrario.

Una vez obtenidos éstos, se calculan ciertos valores que se llaman ordenadas de apoyo de las líneas cruzadas, que tienen la propiedad de que al unir sus extremos con los apoyos (trazar las líneas cruzadas), se encuentran en las verticales que pasan por los puntos fijos, dos puntos que al unirlos y prolongarlos, nos marcan en las verticales de apoyo, los momentos que la carga del tramo, produce en ellos.

Para calcular con este sistema, se procede a averiguar los momentos, que se producen en todos los apoyos debido a la carga de un tramo. Se repite esta operación para cada tramo y después se suman para cada apoyo, los valores de los momentos, que la carga de cada tramo produce en él.

Sólo nos falta saber, como se puede obtener el momento en un apoyo, debido a la carga de un tramo que no es vecino a él.

El diagrama de momentos de un tramo, en el cual no hay cargas, está comprendido, según acabamos de ver por la ecuación (3), entre una recta y el eje de

la viga. Pero sabemos que en los tramos no cargados, el momento se anula en un punto fijo, de manera que conocidos éstos y los momentos que la carga de un tramo produce en sus apoyos; no nos queda más que trazar en los tramos vecinos rectas que unan sus puntos fijos más distantes de los apoyos del tramo en carga, con los vértices de momentos máximos de los apoyos de éste, para obtener en los apoyos de los dos tramos vecinos los momentos que buscábamos.

En los demás tramos se procede en idéntica forma.

II

El sistema gráfico de Ritter

1.º LOS PUNTOS FIJOS

a) En vigas de momento de inercia constante.

Supongamos una viga continua de seis tramos desiguales sobre apoyos fijos, y de sección y módulo de elasticidad constante y que tiene solamente el tercer tramo cargado.

El diagrama de momentos de esta viga es el que se ve en la fig. 3. Las áreas de momentos, en los *tramos extremos* son triángulos; en los *tramos intermedios* no cargados son iguales a la suma de dos triángulos, uno positivo y otro negativo, que tienen por bases los momentos de apoyo y por altura la luz de tramo; en el *tramo cargado* es igual al área de momentos positivos que este tramo tendría si sus extremos fuesen simplemente apoyados, disminuída en un trapecio, cuyas bases son los momentos de apoyo y que se puede descomponer en dos triángulos.

Consideremos aplicadas en los centros de gravedad de las áreas triangulares y en el correspondiente de la área de momentos del tramo en carga, fuerzas elásticas positivas o negativas proporcionales a las áreas, y tracemos el polígono funicular de estas fuerzas. Este polígono es a una cierta escala envolvente de la curva elástica de la viga; pasa por todos los apoyos, puesto que ahí la deformación es nula y es tangente en esos puntos a la curva.

Los puntos de aplicación de las fuerzas, que corresponden a las áreas triangulares, están colocados en los tercios de las luces correspondientes.

La resultante de dos fuerzas W vecinas, una a la izquierda y otra a la derecha de un apoyo, queda sobre una vertical que pasa por el punto de intersección de los lados del funicular que encierran a las fuerzas.

Pero esta vertical se conoce de antemano, puesto que W_n y W_{n+1} son proporcionales a las superficies de dos triángulos de bases iguales, y alturas iguales a l_n y a l_{n+1}

$$\begin{aligned} W_n &= K l_n \\ W_{n+1} &= K l_{n+1} \end{aligned}$$

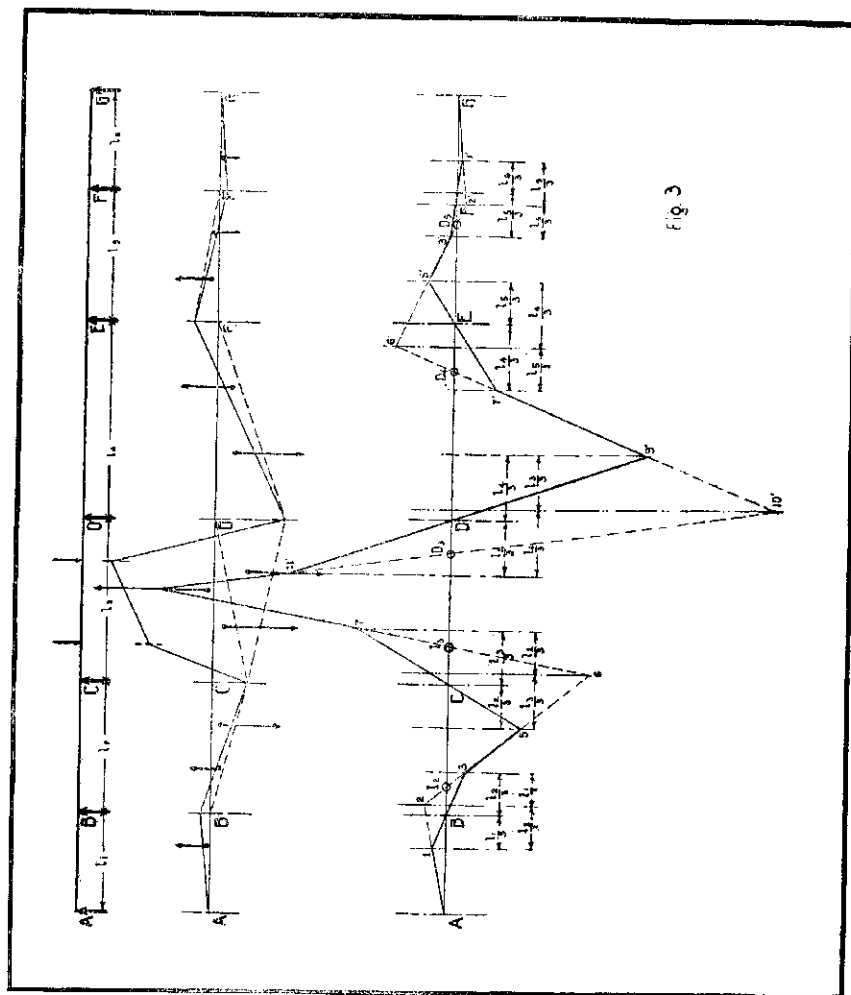
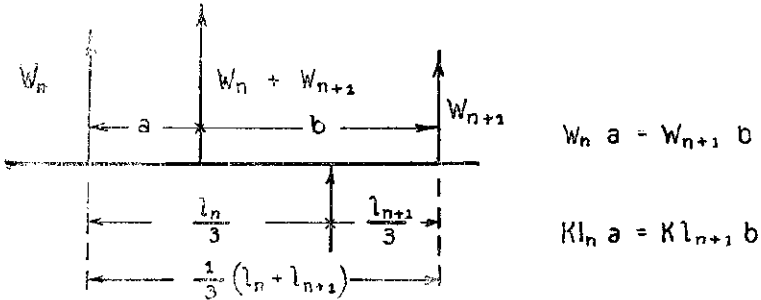


Fig. 3

El punto de aplicación de la resultante, es el punto donde el momento producido por W_n , es igual al producido por W_{n+1} (fig. 4).



$$W_n a = W_{n+1} b$$

$$K l_n a = K l_{n+1} b$$

Fig. 4

$$a = b \frac{l_{n+1}}{l_n}$$

además

$$a = (l_n + l_{n+1}) - b$$

de donde

$$\frac{1}{3} (l_n + l_{n+1}) = b \left(1 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \right)$$

multiplicando por l_n

$$\frac{1}{3} l_n (l_n + l_{n+1}) = b (l_n + l_{n+1})$$

$$b = \frac{1}{3} l_n \quad a = \frac{1}{3} l_{n+1}$$

Luego, para obtener la línea de la resultante, basta invertir las distancias de las fuerzas al apoyo. Esta línea se llama *Ordenada al tercio*.

Observemos el triángulo 123 (fig. 3), sus vértices están sobre rectas fijas y paralelas, y dos de sus lados pasan por puntos fijos, que son los dos primeros apoyos. Por lo tanto el tercer lado debe pasar también por un punto fijo en línea recta con los otros dos. Luego el punto I_2 es un punto fijo, que sólo depende de la luz del primer tramo y de la luz del segundo.

Para el triángulo 1'2'3' se puede decir lo mismo; luego D_3 es un punto fijo.

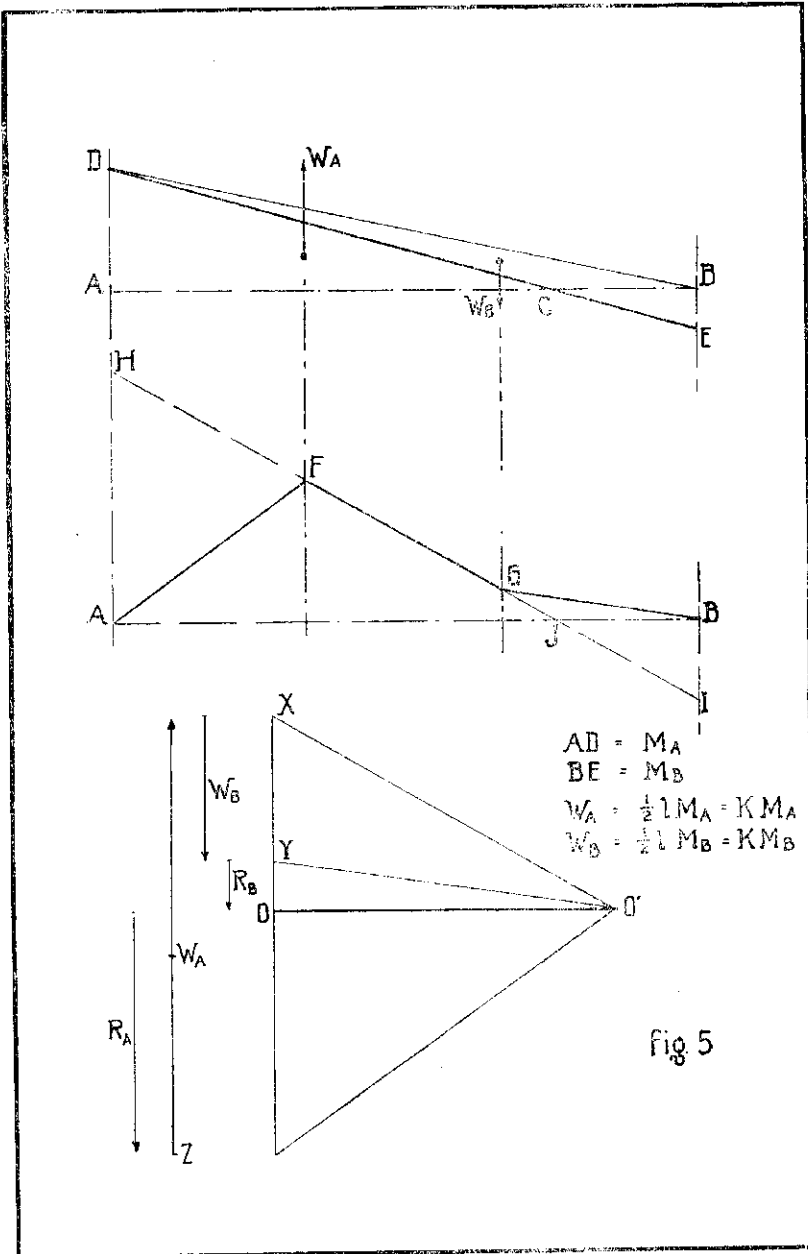
Si nos fijamos ahora en el triángulo 5'6'7' vemos que también tiene sus vértices sobre rectas fijas y que dos de sus lados pasan por puntos fijos, que son el quinto apoyo y el punto D_3 ; luego el punto D_4 es también fijo.

Lo mismo puede decirse de los triángulos 5 6 7 y 9' 10' 11'. De manera que los puntos I_3 y D_3 son también puntos fijos.

Los puntos fijos I_2 , D_4 y D_5 se han obtenido al cortar el eje de la viga, con la prolongación del lado del funicular, que queda comprendido en el tercio central del tramo, y los puntos fijos I_3 y D_3 se han obtenido prolongando hasta cortar el eje de la viga, los lados centrales del polígono funicular del tramo en carga.

Ahora consideremos un tramo aislado, de una viga continua, sobre el cual no hay cargas, pero que tiene sus extremos sometidos a momentos flexionantes, provenientes de cargas que obran en tramos vecinos de la izquierda.

Sean M_A y M_B los momentos (fig. 5). Como hemos visto, el área de mo-



mentos es la diferencia de dos triángulos ABD y BDE cuyas áreas son representadas por fuerzas elásticas W

$$W_A = \frac{1}{2} l M_A = K M_A$$

$$W_B = \frac{1}{2} l M_B = K M_B$$

Construído el polígono funicular de estas fuerzas, se puede observar, que prolongando el lado de este polígono comprendido en el tercio central se forman dos triángulos AFH y BGI que son semejantes respectivamente a XZ0' y a XY0' entonces

$$\frac{AH}{\frac{l}{3}} = \frac{XZ}{OO'} \quad AH = \frac{l}{3,00'} XZ = K_i XZ$$

pero $XZ = W_A$ y como $W_A = K M_A$; $XZ = K M_A$

de donde

$$\begin{aligned} AH &= K K_i M_A = K^i M_A \\ BI &= K K_i M_B = K^i M_B \end{aligned}$$

Luego, la recta HI representa a otra escala lo mismo que la recta DE, y al punto C, que es donde el momento es nulo, le corresponde el punto J que es donde corta a AB, la prolongación de FG, lado central del funicular.

Con esto hemos demostrado que los puntos fijos anteriores, son también puntos de momento nulo, cuando sobre ellos no hay cargas.

En cada tramo hay, pues, dos puntos fijos, uno a la izquierda, donde se anula el momento cuando el tramo cargado está a su derecha y otro a la derecha, en el cual el momento es nulo, cuando el tramo en carga queda a la izquierda.

Como se comprenderá fácilmente, el primer apoyo es también el punto fijo de la izquierda del primer tramo y el último apoyo, es el último punto fijo.

De manera, que una vez obtenidos los momentos en los apoyos de un tramo cargado, su influencia en los demás apoyos, se puede calcular fácilmente si se conocen los puntos fijos.

b) En vigas de momento de inercia variable de un tramo a otro, pero constante en cada uno de ellos.

Como ya sabemos, el polígono funicular de las fuerzas elásticas W, es a una cierta escala envolvente de la curva elástica. Si se toma, como distancia polar del diagrama de vectores de las fuerzas elásticas W, el producto EJ, obtenemos la verdadera inclinación de la viga en los apoyos.

Si consideramos una viga continua, en la cual los diversos tramos tienen distintos momentos de inercia, el diagrama de vectores, tendrá una distancia polar distinta para cada tramo. Para tener un polígono de vectores, con una sola distancia polar, habría que aplicar como fuerzas elásticas W, no las superficies de momentos, sino éstas, divididas por el momento de inercia del tramo respectivo.

Las nuevas fuerzas vecinas del apoyo n, serán:

$$W''_{n-1} = \frac{\frac{1}{2} M_n l_{n-1}}{J_{n-1}} \quad \text{y} \quad W'_n = \frac{\frac{1}{2} M_n l_n}{J_n}$$

Estas fuerzas, como las antiguas, están aplicadas en los tercios de los tramos; y la resultante de éstas pasa por el punto de momento nulo.

$$W''_{n-1} a = W'_n b$$

$$\frac{\frac{1}{2} M_n l_{n-1}}{J_{n-1}} a = \frac{\frac{1}{2} M_n l_n}{J_n} b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{l_n J_{n-1}}{l_{n-1} J_n}$$

Este punto se encuentra, al dividir la distancia $\frac{1}{3} (l_{n-1} + l_n)$ en dos partes a y b , tales que cumplan la relación anterior.

Los puntos, tales como I_2, I_3, D_3, D_4 y D_5 , en el nuevo polígono funicular, también son puntos fijos por las mismas razones anteriores.

La demostración, de que estos puntos fijos, son también puntos de momento nulo, hecha en páginas anteriores, es también válida en este caso.

2.º MÉTODO GRÁFICO PARA DETERMINAR LOS PUNTOS FIJOS

a) En vigas de momento de inercia constante.

De lo que hemos visto más arriba, se deduce un procedimiento gráfico muy sencillo para determinar los puntos fijos.

Se dibuja el diagrama de la viga y se dividen los tramos en tres partes iguales y por los puntos de división se trazan perpendiculares; después se obtiene la ordenada al tercio para cada apoyo, invirtiendo los tercios contiguos a él.

Por el primer punto fijo, que será el extremo de la viga si está simplemente apoyado, se traza una línea con una inclinación cualquiera (fig. 6) que corta a la línea del segundo tercio en el punto 1 y a la ordenada al tercio en 2.

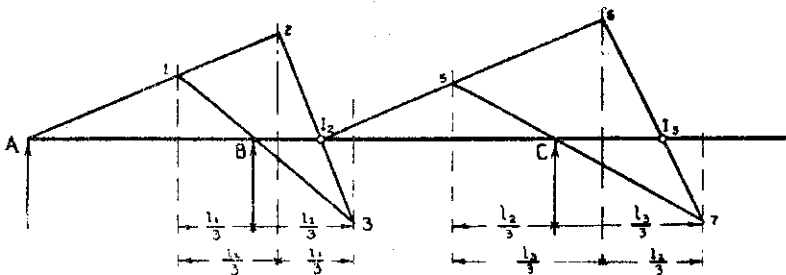


Fig. 6

Uniendo 1 con B y prolongando, se obtiene en la intersección con la línea del primer tercio del segundo tramo, el punto 3, y por fin, uniendo 2 con 3, obtiene-

mos al cortar el eje de la viga, el punto I_2 , que es el punto fijo de la izquierda del segundo tramo.

Idéntica construcción partiendo de I_2 nos da I_3 y así sucesivamente obtenemos todos los puntos fijos de la izquierda.

En forma análoga se obtienen los puntos fijos de la derecha, partiendo del punto fijo de la derecha del último tramo.

Si el extremo de la viga está perfectamente empotrado, se considera que existe otro tramo anterior cuya luz es igual a cero; de manera que al invertir los tercios vecinos al apoyo de empotramiento, obtenemos, que la ordenada al tercio, coincide con la vertical trazada por el primer tercio, y que por lo tanto los puntos 2 y 3 quedan en la misma vertical y la línea 23 confundida con ella, de manera que I_2 queda en el punto tercio del primer tramo.

b) En vigas de momento de inercia variable de un tramo a otro, pero constante en cada uno de ellos.

Como hemos visto en páginas anteriores, la única diferencia de este caso con el anterior, consiste en que la línea de la resultante de las dos fuerzas elásticas W vecinas a un apoyo, no se obtiene al invertir los tercios contiguos a él, sino, dividiendo esta distancia en dos partes proporcionales, a $l_{n+1} J_n$ y a $l_n J_{n+1}$.

La construcción gráfica, es la siguiente:

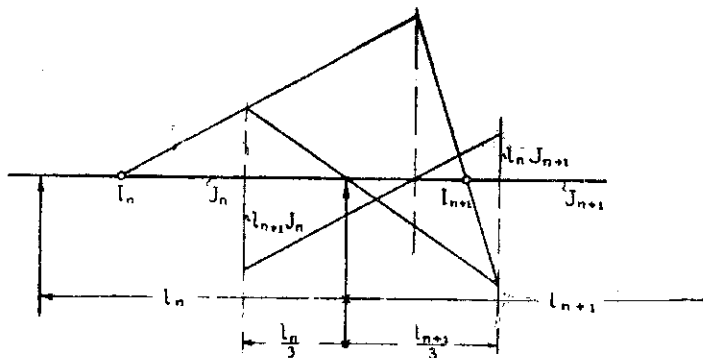


Fig. 7

3.° LAS LÍNEAS CRUZADAS

Supongamos un tramo de una viga continua (fig. 8) sobre el cual existen cargas que producen una área de momentos positivos, tal que su centro de gravedad queda a la distancia l del apoyo A. En los apoyos se producen momentos negativos M_A y M_B que son las bases del área trapezoidal de momentos negativos.

Como hemos visto, esta área puede descomponerse en dos triángulos.

Consideremos, como antes, aplicadas en los centros de gravedad de estas áreas, fuerzas elásticas W proporcionales a ellas, y tracemos el polígono funicular de estas fuerzas.

Prolonguemos hacia arriba, y hacia abajo, hasta cortar las verticales de apoyo, los lados del polígono funicular comprendidos en el tercio central.

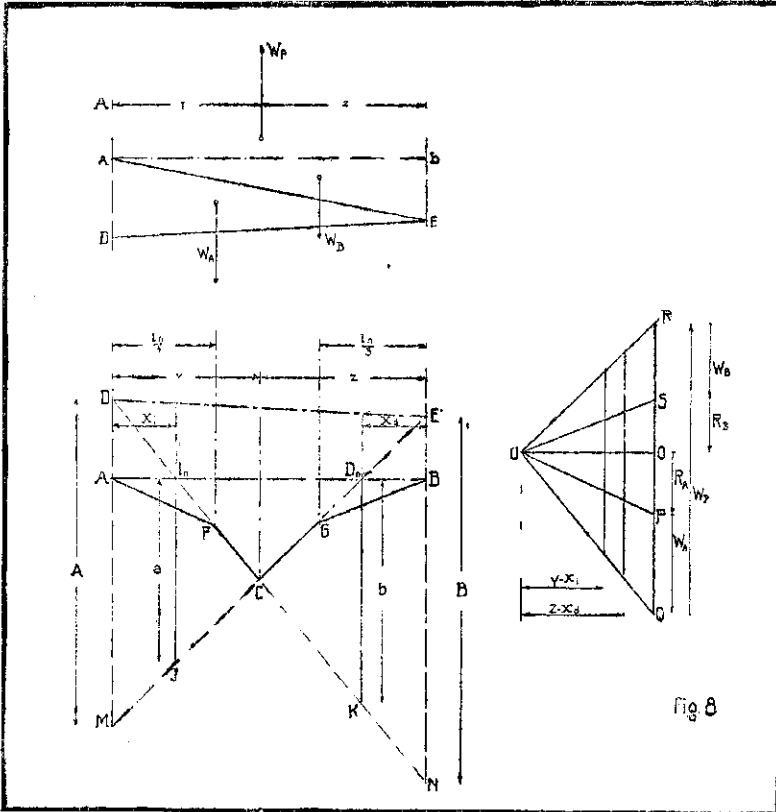


Fig. 8

Como ya sabemos, los puntos I_n y D_n son puntos fijos, que sólo dependen de las luces de los tramos.

Estos puntos fijos, reciben también el nombre de focos y las verticales que pasan por ellos, se llaman *ordenadas focales*.

Observemos los triángulos semejantes $AD'F$ y OPQ

$$\frac{AD'}{\frac{l}{3}} = \frac{W_A}{OO^1}$$

pero

$$W_A = \frac{1}{2} l M_A$$

de donde

$$AD' = \frac{l^2}{6} \frac{M_A}{00'}$$

análogamente

$$BE' = \frac{l^2}{6} \frac{M_B}{00'}$$

Ahora, tracemos en el polígono de fuerzas, dos líneas paralelas a éstas, que disten del polo $y-x_i$ y $z-x_d$; vemos inmediatamente, que estas líneas quedan interceptadas por los lados extremos de este polígono, de tal manera, que sus longitudes son iguales a a y b respectivamente.

Con esto, hemos demostrado, que conociendo la posición de los puntos fijos y la carga del tramo, nosotros podemos determinar los momentos de apoyo M_A y M_B .

En efecto, conocida la carga, conoceremos el valor de la superficie de momentos positivos y su centro de gravedad. Una vez obtenido estos datos, marcamos a una cierta escala, el valor de la superficie de momentos y al frente un polo cualquiera, que unimos a los vértices W_p ; en seguida marcamos las paralelas distantes de $y-x_i$ y de $z-x_d$, valores todos conocidos y obtenemos a y b que aplicamos en las ordenadas focales, y trazando las líneas KD' y JE' , obtenemos en las verticales de apoyo a una cierta escala, los momentos buscados.

Estas líneas se llaman *líneas cruzadas*.

Pero este sistema de obtener los momentos de apoyo, puede ser aún simplificado.

Como hemos visto antes

$$AD' = \frac{l^2}{6} \frac{M_A}{00'}$$

luego, una vez medido en el dibujo el valor de AD' , habrá que dividirlo por l^2 y multiplicarlo $600'$, para obtener el valor de M_A .

Para medir directamente en AD' , el valor de M_A , hay que aplicar en el dibujo un valor de b , reducido en la misma proporción en que estaba amplificado el valor de M_A .

De los triángulos semejantes, obtenemos

$$\frac{b}{z-x_d} = \frac{W_p}{00'}$$

de donde

$$b = \frac{W_p}{00'} (z-x_d)$$

y el valor reducido de b , es

$$b = \frac{W_p}{00'} (z-x_d) \frac{6.00'}{l^2} = \frac{W_p}{\frac{l^2}{6}} (z-x_d)$$

a este valor de b , corresponde un valor de B , que se obtiene de la proporción siguiente:

$$\frac{B}{b} = \frac{z}{z - x_d}$$

de donde

$$B = b \frac{z}{z - x_d}$$

y reemplazando el valor de b

$$B = \frac{W_p}{l^2} z \frac{z}{\frac{6}{z}}$$

análogamente

$$A = \frac{W_p}{l^2} y$$

En nuestro caso, tenemos que la línea de cierre, coincide con el eje AB de la viga.

Consideremos ahora, solamente las líneas cruzadas, las verticales de apoyo, y

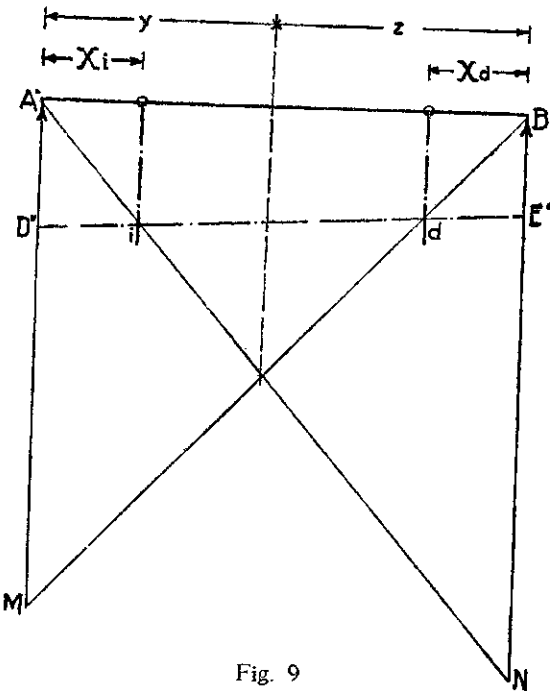


Fig. 9

las ordenadas focales y prescindamos del polígono funicular de las fuerzas elásticas.

Deformemos la superficie $D'E'MN$, y hagamos coincidir $D'E'$ con AB (fig. 9), los antiguos puntos de la línea de cierre AB dejan de estar en una línea horizontal y quedan en una línea inclinada $D''E''$.

Se ve inmediatamente, que todas las líneas verticales y sus distancias entre sí, que son los únicos valores que nos interesan, han conservado su dirección y magnitud.

De manera, que si marcamos en las ordenadas de los apoyos, las cantidades A y B a partir de los apoyos y trazamos las líneas cruzadas AN y BM , obtenemos en las ordenadas focales, dos puntos i y d , que al unirlos, nos dan en las ordenadas de apoyo, dos cantidades iguales a los momentos de apoyo M_A y M_B .

(Continuará).