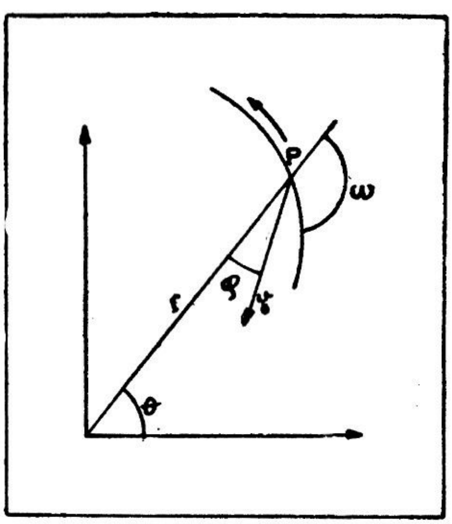
Marcos Pedrero

De la aceleración y la geometría

(A la Memoria del sabio profesor don Alberto Obretch).

LA velocidad es un vector tangente a la trayectoria e igual a $\frac{ds}{dt}$; por consiguiente sus proyecciones sobre los ejes coordenados son $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$. La aceleración es otro vector cuyas proyecciones sobre los ejes son $\frac{d^2x}{dt^2}$ y $\frac{d^2y}{dt^2}$.

Por consiguiente se deduce de la figura



1) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma \cos(\varphi + \vartheta)$$

2) $$\frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma \operatorname{sen}(\varphi + \vartheta)$$

3) $y = f(x)$ [ecuación de la trayectoria]

4) $$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}$$

Tenemos cuatro ecuaciones entre x, y, ϑ, φ, t y γ es decir entre 6 cantidades, por consiguiente falta una ecuación que deberá elegirse de manera a interpretar el movimiento del punto convenientemente.

Nuestro objeto es establecer diversas relaciones entre las variables.

La ecuación (3) nos da:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

y considerando (1) y (2)

$$-\gamma \operatorname{sen}(\vartheta + \varphi) = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{dy}{dx}\gamma \cdot \cos(\vartheta + \varphi)$$

de donde:

$$5) \qquad \gamma = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\frac{dy}{dx} \cdot \cos(\vartheta + \varphi) - \operatorname{sen}(\vartheta + \varphi)}.$$

La expresión del radio de curvatura en una curva plana es

$$\int = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1 + tg^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1}{\cos^3\alpha \, \frac{d^2y}{dx^2}}.$$

o sea

$$6) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\int \cos^3\alpha}$$

pero

$$-r^2\frac{d\vartheta}{dt} = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dt}$$

y si designamos por β esa cantidad variable en el caso general.

$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dt} = -\beta$$

obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\beta}{y - x\frac{dy}{dx}}$$

y reemplazando en (5) $\frac{d^2y}{dx^2}$ de ecuación (6) y $\frac{dx}{dt}$ de (7) obstenemos

$$\gamma = \frac{\dfrac{\beta^2}{\int \cos^3 \alpha \left(y - x \dfrac{dy}{dx}\right)^2}}{\dfrac{dy}{dx} \cos (\vartheta + \varphi) - \operatorname{sen} (\vartheta + \varphi)}$$

pero

$$y = r \cdot \operatorname{sen} \vartheta$$

$$x = r \cos$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

y entonces

$$\gamma = \frac{\dfrac{\beta^2}{\int \cos^3 \alpha \ (r \operatorname{sen} \vartheta - r \cos \vartheta \ \operatorname{tg} \alpha)^2}}{\operatorname{tg} \alpha \cos (\vartheta + \varphi) - \operatorname{sen} (\vartheta + \varphi)}$$

$$\gamma = \frac{\dfrac{\beta^2}{\int r^2 \ (\operatorname{sen} \vartheta \ \cos \alpha - \cos \vartheta \ \operatorname{sen} \alpha)^2}}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos (\vartheta + \varphi) - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} (\vartheta + \varphi)}$$

pero

$$\operatorname{sen} \vartheta \cdot \cos \alpha - \cos \vartheta \cdot \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\vartheta - \alpha)$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos (\vartheta + \varphi) - \cos \alpha \operatorname{sen} (\vartheta + \varphi) = \operatorname{sen} (\alpha - \vartheta - \varphi)$$

luego

$$\gamma = \frac{\beta^2}{r^2 \int \operatorname{sen}^2 (\vartheta - \alpha) \operatorname{sen} (\alpha - \vartheta - \varphi}$$

Según fig. (1)

$$\alpha = \vartheta + 180 - \omega$$

luego

$$8) \qquad \gamma = \frac{\beta^2}{r^2 \int \operatorname{sen}^2 \omega \operatorname{sen} (\omega + \varphi)}$$

como expresión general de la aceleración.

Multipliquemos la ecuación (1) por y, y la (2) por x y obtenemos:

$$9) \qquad y\frac{d^2x}{dt^2} x \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma\,[y \cos(\vartheta + \varphi) - x \,\text{sen}\,(\vartheta + \varphi)]$$

pero

$$y\,\frac{d^2x}{dt^2} - x\,\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\left(y\,\frac{dx}{dt} - x\,\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = -\frac{d}{dt}$$

$$y \cos(\vartheta + \varphi) - x \,\text{sen}\,(\vartheta + \varphi) = r \,\text{sen}\,\vartheta . \cos(\vartheta + \varphi) - r \cos\vartheta \cdot \text{sen}\,(\vartheta + \varphi)$$

$$y \cos(\vartheta + \varphi) - x \,\text{sen}\,(\vartheta + \varphi) = -r \,\text{sen}\,\varphi$$

y reemplazando en (9) obtenemos:

$$10) \qquad \frac{d\beta}{dt} = -\gamma\, r \,\text{sen}\,\varphi$$

Por consiguiente se deduce de (8) y (10) que si la curva es dada en función de ω tendríamos r, $\int$, ϑ en función de ω; pero

$$11) \qquad \beta = \frac{r^2 d\vartheta}{dt}$$

es decir tenemos tres ecuaciones, falta por consiguiente una ecuación que deberá elegirse de manera a interpretar satisfactoriamente el movimiento del punto.

Se deduce fácilmente

$$\beta = r^2\,\frac{d\vartheta}{dt} = r\,V \,\text{sen}\,\omega$$

β es el momento de la velocidad respecto al origen de coordenadas y $-\gamma\, r \,\text{sen}\,\varphi$ es el momento de la aceleración respecto al mismo punto. Luego según (10) la derivada respecto al tiempo del momento de la velocidad es igual al momento de la aceleración.

En particular nos dicen esas ecuaciones (8) y (9) que si la aceleración es central o sea si $\varphi = 0$ se deduce

$$\beta = \text{cte}$$

y si además suponemos

$$\int \text{sen}^3\,\omega = \text{cte}$$

que es precisamente la ecuación de las cónicas referidas al foco, obtenemos la ley de Newton.

OTRAS RELACIONES GENERALES IMPORTANTES

Multipliquemos ecuación (1) por $\frac{dx}{dt}$ y la (2) por $\frac{dy}{dt}$ y obtenemos

$$12) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\gamma \cos (\vartheta + \varphi) \dfrac{dx}{dt} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\gamma \operatorname{sen} (\vartheta + \varphi) \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

pero

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

de donde:

$$\frac{dV^2}{dt} = 2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$$

luego sumando miembro a miembro a miembro ecuaciones (12) obtenemos

$$\frac{d\frac{1}{2}V^2}{dt} = -\gamma \left[\cos (\varphi + \vartheta) \frac{dx}{dt} + \operatorname{sen} (\varphi + \vartheta) \frac{dy}{dt}\right]$$

perc

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = V \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{d\frac{1}{2}V^2}{dt} = -\gamma V [\cos (\varphi + \vartheta) \cos \alpha + \operatorname{sen} (\varphi + \vartheta) \operatorname{sen} \alpha)]$$

$$\frac{d\frac{1}{2}V^2}{dt} = -\gamma V \cos (\varphi + \vartheta - \alpha)$$

$$\alpha = \vartheta + 180 - \omega$$

$$\frac{d\frac{1}{2}V^2}{dt} = \gamma V \cos (\omega + \varphi)$$

$$\frac{ds}{dt} = V$$

luego

$$13) \qquad d\tfrac{1}{2}V^2 = \gamma \, ds \cos(\omega + \varphi)$$

El 2.° miembro es el producto de la aceleración por la proyección del camino recorrido en la dirección de la aceleración. *Resulta entonces que* (13) *es una fórmula de geometría deducida únicamente de las definiciones de velocidad y aceleración.*

De (10) y (13) se obtiene

$$14) \qquad d\beta = -\frac{\operatorname{sen}\varphi \cdot r\,dv}{\cos(\omega + \varphi)}$$

pero

$$\beta = r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = r\,V \operatorname{sen}\omega$$

y reemplazando en (8)

$$15) \qquad \gamma = \frac{v^2}{\int \operatorname{sen}(\omega + \varphi)}$$

$$16) \qquad \frac{d\beta}{\beta} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega \cos(\omega + \varphi)} \cdot \frac{dv}{v}$$

De (10) y (15) se deduce fácilmente

$$16^1) \qquad \frac{d\beta}{\beta} = -\frac{\operatorname{sen}}{\operatorname{sen}(\omega + \varphi)\operatorname{sen}\omega} \cdot \frac{ds}{\int}$$

La ecuación (16) puede también escribirse en la forma

$$17) \qquad \frac{d\beta}{\beta} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2\operatorname{sen}\omega\cos(\omega + \varphi)} \cdot \frac{d\frac{1}{2}v^2}{\frac{1}{2}v^2}$$

$$18) \qquad \frac{d\beta}{\beta} = \frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}(\omega + \varphi)}{2\operatorname{tg}\omega} \cdot \frac{d\frac{1}{2}v^2}{\frac{1}{2}v^2}$$

β es el duplo del area descrita por el punto en la unidad de tiempo es decir

$$\beta = r^2 \frac{d\vartheta}{dt}$$

De la razón entre las dos componentes de la aceleración: la tangencial y normal

La razón entre las dos componentes de la aceleración parece tener en los fenómenos físicos una gran importancia.

Sea P la posición del móvil en el instante t; tracemos la tangente en dicho punto. Si suponemos el origen de coordenadas en un punto de esa tangente y aplicanos ecuación (13) obtenemos

$$\omega = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = \gamma \cos \varphi_1$$

El segundo miembro es la proyeeción de la aceleración sobre la tangente a la trayectoria, es decir la componente tangencial que designamos por γ_t.

Analogamente se deduce eligiendo un punto sobre la normal a la trayectoria y aplicando ecuación (15)

$$\omega = 90^\circ$$

$$\frac{v^2}{\int} = \gamma \cos \varphi_2$$

$\gamma \cos \varphi_2$ es la proyección de la aceleración sobre la normal; la designamos por γ_n.

Luego

$$\gamma^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\int^2}$$

De (13) y (15) se obtiene

$$\frac{d\frac{1}{2}V^2}{V^2} = \frac{ds}{\int \operatorname{tg}\,(\omega + \varphi)}$$

de donde

19) $$\frac{1}{\operatorname{tg}\,(\omega + \varphi)} = \frac{\int dv}{v\,ds} = \frac{\int}{v^2}\,\frac{dv}{dt}$$

El segundo miembro es igual a la razón entre las dos componentes de la aceleración γ_t y γ_n; designaremos esa razón por Z

20) $$Z = \frac{1}{\operatorname{tg}\,(\omega + \varphi)} = \frac{\int}{v}\,\frac{dv}{ds} = \frac{1 - \operatorname{tg}\omega\ \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\varphi}$$

de donde

21) $$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\cos\omega - Z\,\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\omega + Z\cos\omega} \\[2ex] \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\cos\omega - Z\,\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{1+Z^2}} \end{array}\right.$$

Si expresamos sen ω en función de φ y Z obtenemos una ecuación idéntica es equivalente a cambiar ω por φ.

Breves consideraciones sobre los principios de la Mecánica

Refiriéndose a la fuerza dice León Lecornu * lo siguiente:

«No sabiendo nada de la naturaleza íntima de las fuerzas, convendremos en medir la fuerza por su efecto, es decir por la aceleración que ella imprime a un punto material y en representarlo por un vector de la misma dirección que la aceleración teniendo por longitud el producto de la aceleración por un factor *provisoriamente* arbitrario. Este coeficiente es la masa».

«Las ecuaciones de Lagrange y con ellas el principio de Hamilton o de mínima acción no son válidas para los sistemas con frotamiento, que son por otra parte, los solo sistemas reales. Parece entonces que es necesario buscar en otra parte la clave de los fenómenos naturales».

«El principio de Carnot que es el segundo principio de la Termodinámica, no tiene la pretensión de darnos esta clave, pero a lo menos el da indicaciones preciosas sobre el sentido en el cual se efectúan las transformaciones de los sistemas reales».

Henry Poincaré en La valer de la Science, pág. 181, nos dice que «el principio de Carnot es el solo principio que no se presenta como una consecuencia inmediata de la hipótesis de las fuerzas centrales».

El mismo autor en Science et Hypothése pág. 125 refiriéndose a la hipótesis de las fuerzas centrales dice: ¿Esta hipótesis es rigurosamente exacta? ¿Es cierto que no será jamás en contradicción con la experiencia? ¿Quién se atrevería a afirmarlo? Y si nosotros debiéramos abandonar esta hipótesis todo el edificio tan laboriosamente edificado se derrumbaría.

Refiriéndose a la contracción de Lorenz (Science et Methodes pág. 247). Esta desformación de los electrones parece bien hipotética. Pero se puede presentar la cuestión en otra forma de manera de evitar de poner esta hipótesis en la base del razonamiento. Consideremos los electrones como puntos materiales y veamos como debe variar su masa para no estar en contradicción con el principio de relatividad. O también, cual debe ser su aceleración bajo la influencia de un campo eléctrico o magnetico, para que este principio no sea violado y para que se llegue a las leyes ordinarias suponiendo la velocidad muy débil. Encontraremos que las variaciones de esta masa o de estas aceleraciones, deben verificarse como si el electrón experimentase la deformación de Lorenz. Se trata, dice, (La valeur de science, pág. 202) ante todo de obtener una teoría más satisfactoria de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento? Es ahí sobre todo como yo lo he demostrado anteriormente, en que las dificultades se acumulan; se hace algunas hipótesis y no se puede satisfacer a todos los principios a la vez; no se ha podido hasta aquí salvar los unos que a condición de sacrificar los otros; pero toda la esperanza de obtener mejores resultados no es perdida. Tomemos la teoría de Lorenz démosle vuelta en todo sentido, modifiquémosla poco a poco y todo se arreglará posiblemente».

«Así en lugar de suponer que los cuerpos en movimiento experimentan una

* La Mecanique, pág. 92 y 202.

contracción en el sentido del movimiento y que esta contracción es la misma cualquiera que sea la naturaleza de estos cuerpos y las fuerzas a que están sometidos, no se podría hacer otra hipótesis más simple y más natural?»

«Se podría imaginar por ejemplo que es el éter que se modifica cuando se encuentra en movimiento relativo con respecto al medio natural que lo penetra; que cuando él es modificado no trasmite más las perturbaciones con la misma velocidad en todos sentidos. Trasmitiría más rápidamente las que se propagan paralelamente al movimiento del medio, sea en el mismo sentido, sea en sentido contrario, y menos rápidamente las que se propagan perpendicularmente. Las superficies de ondas no serían ya esferas sino elepsoides y se podría abandonar esta *extraña contracción de todos los cuerpos*».

«Yo no cito esto que a título de ejemplo, puesto que las modificaciones que se podría ensayar serían evidentemente susceptibles de variar al infinito».