

ALGUNAS OBSERVACIONES

RELATIVAS A UN PROCEDIMIENTO IDEADO POR EL SR. DEINERT PARA LA MEDICION DE LAS BASES JEODÉSICAS

(Conferencia dada por el señor A. Obrecht en el Instituto de Ingenieros de Chile el 27 de Agosto del presente año.)

En una publicacion relativa al mapa de Chile, (1) el jefe de la seccion de Jeografía del Estado Mayor Jeneral, señor Deinert, da a conocer los resultados obtenidos en la medicion de una base jeodésica, de unos ocho kilómetros de largo, situada entre Talagante i Melipilla.

Las medidas se hicieron dos veces consecutivas segun un procedimiento nuevo, inventado por el mismo señor Deinert, i los dos valores obtenidos, para el largo total de la base, presentan una concordancia mui satisfactoria, puesto que su diferencia alcanza solo unos pocos milímetros.

En esta operacion se empleó una huincha de acero de 50 metros de largo que iba apoyada en toda su estension sobre un riel del ferrocarril, i las dilataciones de la huincha, debidas a las variaciones de la temperatura, se correjían por un cambio correspondiente de su tension.

La concordancia de los dos resultados parciales parece comprobar la bondad del nuevo método; sin embargo, me propongo demostrar que, en realidad, el resultado final está afectado de un *error sistemático* i que su indecision puede estimarse en *un metro*.

* * *

Principiaré por recordar cómo se procede jeneralmente para correjir las medidas de una base jeodésica de los errores debidos a las variaciones de la temperatura, cuando se emplean huinchas o alambres metálicos.

El método usual consiste en comparar constantemente las indicaciones de dos alambres de distintos metales, que tienen un mismo largo a una temperatura t_0 , i están sometidos a una misma tension constante.

(1) Publicamos en la Crónica los párrafos pertinentes de la Memoria del señor Deinert.—*La Comision de Redaccion.*

Sean α i α' los coeficientes de dilatacion de los dos metales i δ , δ' sus dilataciones cuando la temperatura t_0 se cambia en t . Se tiene evidentemente:

$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{\delta'}{\alpha'} = \frac{\delta' - \delta}{\alpha' - \alpha}$$

De donde

$$\delta = \frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} (\delta' - \delta)$$

$$\delta' = \frac{\alpha'}{\alpha' - \alpha} (\delta' - \delta)$$

La diferencia $\delta' - \delta$ de las dos dilataciones es la diferencia de las longitudes de los dos alambres a la temperatura t ; ella se mide directamente i las fórmulas anteriores permiten calcular en seguida las dilataciones δ i δ' .

Por ejemplo, si los dos alambres son de acero i de cobre, se tiene

$$\alpha = 0,0000107 \text{ acero}$$

$$\alpha' = 0,0000188 \text{ cobre}$$

$$\delta = 1,3 (\delta' - \delta)$$

$$\delta' = 2,3 (\delta' - \delta)$$

Se ve que un error sobre la medida de $\delta' - \delta$ enjendra un error casi igual en el cálculo de δ i un error mas o ménos doble en el cálculo de δ' . En consecuencia, las medidas deberán espesarse segun las indicaciones del alambre de acero.

Como otro ejemplo, supondremos que un alambre sea de *invar*, el otro de cobre. El *invar* es una aleacion de 64,3 partes de fierro por 35,7 de nickel; su coeficiente de dilatacion es mui pequeño i se tiene en este caso

$$\alpha = 0,0000028 \text{ invar}$$

$$\alpha' = 0,00001884 \text{ cobre}$$

$$\delta = 0,015 (\delta' - \delta)$$

$$\delta' = 1,015 (\delta' - \delta)$$

Se ve que un error de un milímetro sobre la medida de $\delta' - \delta$ corresponde solo a un error de quince milésimos de milímetros en el cálculo de la dilatacion δ del invar.

* * *

El señor Deinert emplea tambien dos huinchas del mismo largo, pero ellas son de un mismo metal, el *acero*. Una de las dos huinchas sirve para las medidas i la otra constituye una especie de termómetro; en esta última, una de las dos estremidades de la huincha está fijada a un punto invariable del terreno i la otra acciona el resorte de un dinamómetro; éste, a su vez, está fijado tambien invariablemente en el terreno.

La huincha fija está sometida a una tension de 50 kg. a la temperatura de 25° i las variaciones de la temperatura se manifiestan por una variacion correspondiente de la tension.

El señor Deinert hace el raciocinio siguiente: (1) «Supongamos el caso que se haya disminuido la temperatura i que la huincha se haya contraído de modo que el dinamómetro marque 53 kg. en vez de 50 kg., claro es que se puede dar a la huincha la longitud anterior, aumentando la tensión en 3 kg., puesto que a cada posición de la aguja o, lo que es lo mismo, a cada tensión del dinamómetro tiene que corresponder cierta longitud de la huincha, cualquiera que sea la causa de la dilatación o contracción de la huincha. Por consiguiente, si damos al dinamómetro una tensión de $53+3=56$ kg. la huincha tendrá la longitud que tenía antes de contraerse por la disminución de la temperatura.»

Esta conclusión no está conforme con la realidad; en efecto, la contracción de la huincha, debida al descenso de la temperatura, es exactamente igual a la extensión del resorte del dinamómetro, puesto que un extremo de la huincha i el extremo opuesto del resorte del dinamómetro quedan fijos. Ahora, la extensión del resorte corresponde a los 3 kg. de aumento de su tensión; otro aumento igual de 3 kg. en la tensión del resorte le dará una nueva extensión igual a la primera, pero nada autoriza para afirmar que la huincha tendrá también una extensión igual; sería necesario para esto que un mismo aumento de la tensión produjera extensiones iguales en la huincha i en el resorte del dinamómetro. Esto no sucede generalmente i, sin embargo, para que la huincha vuelva a tomar su longitud primitiva es necesario precisamente que esta condición sea satisfecha.

*
* * *

Un cálculo elemental lo demuestra muy claramente.

Sean: L_0 la longitud de la huincha fija a la temperatura t_0 i bajo una tensión Q_0 ; β la extensión de un metro de huincha correspondiente a un aumento de 1 kg. en la tensión; L la longitud de la misma huincha a otra temperatura t i otra tensión Q ; α su coeficiente de dilatación.

En la práctica las diferencias $t-t_0$ i $Q-Q_0$ quedan suficientemente pequeñas para que se pueda escribir simplemente

$$(1) \quad (L=L_0) 1 + \alpha(t-t_0) + \beta(Q-Q_0)$$

Sean también: l_0 la longitud del resorte del dinamómetro a la tensión Q_0 i l su longitud a la tensión Q ; γ su coeficiente de elasticidad. Como l_0 es muy pequeño, las variaciones de la temperatura no tendrán efecto apreciable; i se tendrá simplemente

$$l=l_0 [1 + \gamma(Q-Q_0)]$$

Ahora la longitud total de la huincha i del resorte del dinamómetro queda por hipótesis constante; por consiguiente

$$L+l=L_0+l_0$$

De donde se deduce

$$(2) \quad L_0\alpha(t-t_0) + L_0\beta(Q-Q_0) + l_0\gamma(Q-Q_0) = 0$$

(1) *La Red de Melipilla* por FÉLIX DEINERT (Páj. 24).

Los productos $l_0\gamma$, $L_0\beta$ representan las estensiones respectivas del resorte del dinamómetro i de la huincha, debidas a una tension de un kilogramo; pongamos

$$l_0\gamma = m L_0\beta$$

Tendremos, segun (2),

$$(3) \quad \alpha (t - t_0) + \beta (1 + m) (Q - Q_0) = 0$$

Esta fórmula demuestra que la huincha fija, con el dinamómetro intercalado, constituye un verdadero termómetro, puesto que las variaciones $t - t_0$ de la temperatura son proporcionales a las variaciones correspondientes $Q - Q_0$ de la tension.

Las indicaciones de este termómetro no dependen de la longitud L_0 de la huincha metálica, sino del valor que tiene el coeficiente m , es decir, de la razon entre las estensiones del resorte del dinamómetro i la huincha para un mismo aumento de la tension.

Por su definicion misma, el coeficiente m es esencialmente positivo, pero puede tener un valor cualquiera comprendido entre cero i el infinito.

Ademas la fórmula (3) muestra que la sensibilidad del termómetro aumenta a medida que m disminuye.

*
* *
*

Consideremos ahora la huincha móvil, con la cual se hacen las medidas, i sean: L'_0 su longitud a la temperatura t_0 i a la tension Q'_0 ; L' su longitud a otra temperatura t i otra tension Q' . (En los esperimentos del señor Deinert, L'_0 i Q'_0 son respectivamente iguales a L_0 i Q_0 ; aqui, para mas jeneralidad, los supondremos distintos; solo admitiremos que las dos huinchas son del mismo metal i tienen la misma seccion). Se puede aplicar de nuevo la fórmula (1) i los valores de α i β quedarán los mismos como mas arriba; de suerte que

$$L' = L'_0 [1 + \alpha (t - t_0) + \beta (Q' - Q'_0)]$$

Para que L' sea igual a L'_0 es necesario que la tension Q' satisfaga a la ecuacion

$$\alpha (t - t_0) + \beta (Q' - Q'_0) = 0$$

O bien, si se reemplaza $t - t_0$ por su valor en funcion de la variacion $Q - Q_0$ de la tension de la huincha fija, fórmula (3),

$$Q' - Q'_0 + (1 + m) (Q - Q_0) = 0$$

De donde

$$(4) \quad Q' = Q'_0 + (1 + m) (Q - Q_0)$$

Esta última fórmula da la solución exacta del problema, i la huincha móvil sometida a la tensión Q' tendrá exactamente la longitud que corresponde a la temperatura t_0 .

Caso particular

Supongamos $m = 1$, entonces la huincha fija i el resorte de su dinamómetro se estienen igualmente para las mismas variaciones de la tensión i la fórmula (4) da

$$Q' = Q'_0 + 2(Q - Q_0)$$

O bien, si se admite que $Q'_0 = Q_0$,

$$(5) \quad Q' = 2Q - Q_0$$

Esta es la fórmula que emplea el señor Deinert, sin advertir que ella se refiere solo al caso de $m = 1$.

Error que resulta del empleo de la fórmula (5)

Supongamos que, en la fórmula (4), Q'_0 sea igual a Q_0 ; la diferencia entre los valores (4) i (5) de Q' es

$$\Delta Q = (m - 1)(Q - Q_0)$$

A este error ΔQ sobre la tensión corresponde un error de $\beta \Delta Q$ sobre cada metro de la huincha i se tiene

$$\beta \Delta Q = \beta (m - 1)(Q - Q_0)$$

O bien, según (3),

$$\beta \Delta Q = \frac{1 - m}{1 + m} \alpha (t - t_0)$$

Sea todavía

$$(6) \quad \alpha_1 = \frac{1 - m}{1 + m} \alpha$$

Tendremos

$$\beta \Delta Q = \alpha_1 (t - t_0)$$

Luego el error cometido cuando se emplea el valor erróneo de Q' definido por la ecuación (5) equivale a despreciar las dilataciones de la huincha, suponiendo que ella tiene un coeficiente de dilatación igual a α_1 .

Como m puede tener todos los valores positivos comprendidos entre cero i el infinito, a_1 podrá tener tambien un valor cualquiera comprendido entre $-a$ i $+a$.

Ahora cuando se desprecia las dilataciones de la huincha, el error cometida sobre una base de 8 kilómetros de largo, equivale a la dilatacion de una huincha de 8,000 metros para el número de grados que representa la diferencia entre la temperatura media de las medidas i la temperatura t_0 .

Para tener una idea de este error, podemos suponer esta diferencia igual a 6 grados, por ejemplo, lo que no es exajerado; entónces la dilatacion de una huincha de 8,000 metros de acero seria

$$8,000 \times 6 \times 0,0000107 = 0,5 \text{ m.}$$

Por último, como a_1 puede tener todos los valores posibles entre $-a$ i $+a$, el error sistemático que resulta del empleo de la fórmula (5) está comprendido entre $-0,5$ metros i $+0,5$ metros.

La indecision del largo de la base es, por consiguiente, de *un metro*.

A. OBRECHT.

