

# RESISTENCIA DE LAS PLACAS (1)

## § 1

### PLACAS CIRCULARES

En el estudio que se hace para obtener fórmulas que nos permitan determinar la escuadría de las piezas solicitadas por traccion o flexion, se supone que las dimensiones trasversales de las piezas o vigas consideradas sean pequeñas comparadas con la longitud. Cuando esta condicion no se cumple, las fórmulas obtenidas no son jeneralmente aplicables (2) i es preciso entónces recurrir a la *Teoría matemática de la elasticidad* para darse cuenta de lo que pasa, cuando se tiene, al contrario, que tratar las piezas cuya longitud i ancho son grandes comparados con la tercera dimension, es decir, el espesor. A pesar de las sabias investigaciones que se han hecho respecto a esta cuestion tan interesante, el problema de la deformacion i de la resistencia de las *placas* no queda aun resuelto en todos sus detalles i nos limitaremos a citar los resultados que se han obtenido por los jeómetras despues de larguísimos como laboriosos cálculos (3). Suponemos en este § 1, que se trata de placas circulares, placas cuyo espesor, sin ser demasiado pequeño, es sin embargo, débil relativamente al diámetro, pero puédesse comparar con él; las placas en cuestion reposan, como lo diremos luego, sobre apoyos circulares en los cuales ellas pueden, ademas de eso, ser empotradas; pero (como en el caso de las vigas rectas) se supone que no pueden dar lugar sino a momentos o a reacciones normales a las placas; pero jamas a esfuerzos solicitantes tanjenciales a la direccion de su plano.

Designaremos por:

- $\epsilon$  el espesor de la placa supuesto *constante*, i espesado en milímetros (m/m).
- $f$  la flecha máxima que ella toma en m/m.

---

(1) Apuntes tomados de las lecciones de M. A. Madamet, Directeur de l'Écol d'aplication du Jénie Maritime.

(2) En particular es absolutamente inadmisibile calcular la resistencia de un piston de cilindro asimilando cada una de *sus mitades* a una pieza empotrada segun el largo de uno de sus diámetros i flexionada por cargas uniformemente repartidas que representen la presion del vapor o de un fluido en jeneral.

(3) Las fórmulas que damos son las del tratado de Grashof, *Theorie der Elasticitat und Festigkeit*, despues de haber tenido siempre en cuenta el coeficiente de contraccion  $\eta$  igual no a  $\frac{1}{3}$ , pero sí a  $\frac{1}{4}$  como lo indica la teoría matemática de la elasticidad para los sólidos isotropos. Estas fórmulas concuerdan perfectamente con las de Mathieu, *Theorie de l'élasticité des corps solides*, i las de Clebsch, [*Theorie de*

$p$  la presión normal uniformemente repartida que le es aplicada, expresada en kilogramos por  $m^2$ .

$R_x$  la carga según el radio a la cual la materia está sometida a una distancia  $x$  del centro.

$R_y$  la carga en el sentido perpendicular al radio  $i$  en el plano de la placa, a la misma distancia  $x$  del centro.

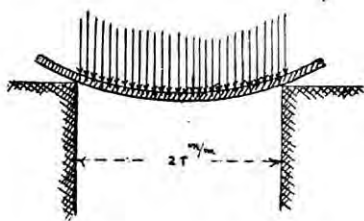


Fig. 1

Estas cargas  $R_x$  i  $R_y$  se producen como consecuencia de los momentos de flexión i en los puntos situados en la superficie de la placa, es decir, allá donde la fatiga (tracción o compresión) toma su valor máximo. En cuanto a los esfuerzos de corte que están muy lejos de ser cero, nos abstendremos de darles valor porque pueden dejárselos a un lado en la práctica.

1.º—Placa circular apoyada en su contorno i soportando una carga de  $p$  kilogramos por milímetro cuadrado.

Se tiene en este caso:

$$f = \frac{189}{256} \frac{p r^4}{E. \epsilon^3}$$

$$R_x = \frac{45}{128} \frac{p}{\epsilon^2} \left( \frac{13}{5} r^2 - 3x^2 \right)$$

$$R_y = \frac{45}{128} \frac{p}{\epsilon^2} \left( \frac{13}{5} r^2 - x^2 \right)$$

El máximo de estos valores tiene lugar cuando  $x=0$  i es:

$$R = \frac{117}{128} \frac{p r^2}{\epsilon}$$

*l'élasticité des corps solides*, traducida por Saint-Venant,] salvo, para esta última, un término complementario de pequeña importancia.

Se llaman cuerpos *isótropos* aquellos que, además de ser *homogéneos* tienen una *elasticidad constante*, lo que equivale a decir que su contextura es la misma en *todos* sentidos.

En el *Journal de Physique théorique et appliquée*, tomo VII, página 363, se encuentran los valores obtenidos en experiencias hechas después del año 1890 por M. Amagat.

| Materiales          | Valores de $\eta$ |
|---------------------|-------------------|
| Vidrio = .....      | 0,2451            |
| Cristal = .....     | 0,2199            |
| Acero = .....       | 0,2686            |
| Cobre = .....       | 0,3670            |
| Latón = .....       | 0,3275            |
| Metal delta = ..... | 0,3399            |
| Plomo = .....       | 0,4282            |

Se ve que para los metales empleados en la construcción se puede adoptar  $\eta=0.25$  lo que confirma el valor adoptado:  $\frac{1}{4}$ .

Para un mismo valor de  $\epsilon$ , la fatiga de la placa es la misma cualquiera que sea  $r$  cuando la carga total  $p \pi r^2$  es constante.

2.º—Placa circular empotrada en su contorno i soportando una carga de  $p$  kilogramos por  $m^2$ .

$$f = \frac{45}{256} \frac{p r^4}{E \epsilon^3}$$

$$R_x = \frac{45}{128} \frac{p}{\epsilon^2} (r^2 - 3x^2)$$

$$R_y = \frac{45}{128} \frac{p}{\epsilon^2} (r^2 - x^2)$$

Al centro la carga es la misma en todos sentidos i tiene por valor:

$$R_o = \frac{45}{128} \frac{p r^2}{\epsilon^2}$$

En el contorno  $R_y$  es cero, mientras que  $R_x$  es máximo i tiene por valor absoluto

$$R = \frac{45}{64} \frac{p r^2}{\epsilon^2}$$

3.º—Placa circular apoyada en su contorno i cargada en su centro por un peso  $P$ .—

Fig. 3.

El peso  $P$  es supuesto repartido sobre una circunferencia de un pequeño radio  $r_0$  i se tiene:

$$f = \frac{117}{64 \pi} \frac{p r^2}{E \epsilon^3}$$

$$R_x = \frac{45}{32 \pi} \frac{P}{\epsilon^2} \left( \text{Log.} \frac{r}{x} - \frac{1}{5} \right)$$

$$R_y = \frac{45}{32 \pi} \frac{P}{\epsilon^2} \left( \text{Log.} \frac{r}{x} + \frac{4}{5} \right)$$

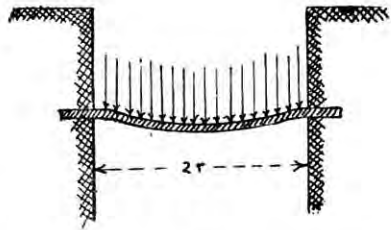


Fig. 2

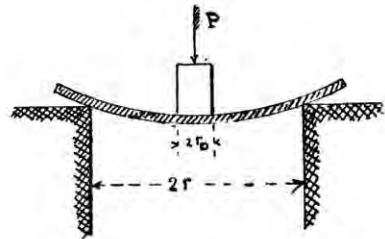


Fig. 3

Estas dos expresiones son máximas para  $x = r_0$ , i es la segunda la que da el mayor valor

$$R = \frac{45}{32 \pi} \frac{P}{\epsilon^2} \left( \text{Log.} \frac{r}{r_0} + \frac{4}{5} \right)$$

o bien

$$R = K \frac{P}{\epsilon^2}$$

expresion independiente de  $r$ , o, a lo ménos, siendo solamente funcion de  $\frac{r}{r_0}$ .

El coeficiente numérico  $K$  tiene los valores siguientes:

para 
$$\frac{r_0}{r} = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{60},$$

$$K = 1.4, 1.7, 1.9, 2.0, 2.1, 2.2$$

Para  $r_0=0$  la fatiga llega a lo infinito i se ve por consiguiente, que, en este caso, como en el siguiente, hai un interes capital en que una carga central sea repartida sobre un círculo o sobre una circunferencia cuyo radio no sea muy pequeño.

Como lo veremos pronto i esto es ademas evidente, la misma precaucion es indispensable tomar para un soporte sirviendo de apoyo central.

4.º—*Placa circular empotrada en su alrededor i cargada en su centro con un peso  $P$ .*

Con las mismas notaciones que en el caso precedente, se tiene:

$$f = \frac{45}{64} \frac{P}{\pi} \frac{r^2}{E \epsilon^3}$$

$$R_x = \frac{45}{32} \frac{P}{\pi} \frac{1}{\epsilon^2} \left( \text{Log.} \frac{r}{x} - 1 \right)$$

$$R_y = \frac{45}{32} \frac{P}{\pi} \frac{1}{\epsilon^2} \text{Log.} \frac{r}{x}$$

El máximo de  $R_y$ , que es el mas grande de los dos, tiene lugar para

$$x = r_0$$

i si se pone, como la acabamos de hacer,

$$R = K' \frac{P}{\epsilon^2},$$

se tiene:

para 
$$\frac{r_0}{r} = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{60},$$

$$K' = 1.0, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8$$

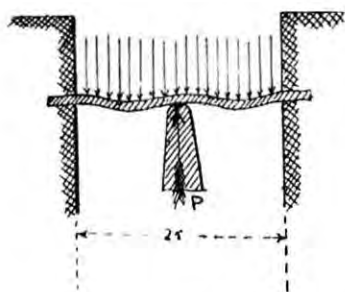


Fig. 4

5.º—*Placa circular empotrada en su contorno sostenida en su centro i cargada con  $p$  kilogramos por milímetro cuadrado.*

La fuerza que es preciso aplicar al centro para impedir el desplazamiento de ese punto será:

$$-P = \frac{1}{4} \pi r^2 p$$

i se tiene:

$$R_x = \frac{45}{128} \frac{p r^2}{\epsilon^2} \left( \text{Log} \frac{r}{x} + \frac{3x^2}{r^2} - 2 \right)$$

$$R_y = \frac{45}{128} \frac{p r^2}{\epsilon^2} \left( \text{Log} \frac{r}{x} + \frac{3x^2}{r^2} - 1 \right)$$

Para  $x=0$  los valores anteriores son infinitos; es preciso pues suponer que el apoyo central es una circunferencia de radio pequeño  $r_0$ , i si se supone que la razon  $\frac{r_0}{r}$  es mui pequeña, la carga máxima es dada por  $R_y$  i tiene lugar cuando  $x=r_0$ ; su valor es

$$R = \frac{45}{128} \frac{p r^2}{\epsilon^2} \left( \text{Log} \frac{r}{r_0} + \frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right)$$

Podemos darnos cuenta fácilmente que si  $\frac{r_0}{r}$  es suficientemente grande,  $R_x$  puede llegar a ser superior a  $R_y$ .

6.º—Placa anular empotrada en su contorno, móvil en su parte central sobre un hueco cilíndrico de radio  $r_0$  i cargada con  $p$  kilogramos por milímetro cuadrado.

(fig. 5.)

Si se pone

$$\frac{r_0}{r} = n \quad a = \frac{1 - \left( 4 \text{Log} \frac{1}{n} + 1 \right) n^2}{\frac{1}{n^2} - 1}$$

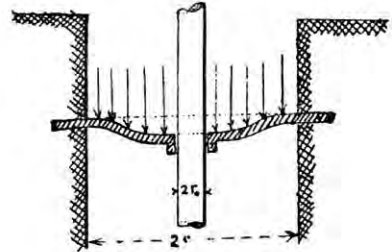


Fig. 5

se tiene:

$$R_x = \frac{45}{128} \frac{p r^2}{\epsilon^2} \left[ 1 - \frac{3 x^2}{r^2} - 4 n^2 \left( \text{Log} \frac{r}{x} - 1 \right) + a \left( \frac{r^2}{x^2} + 1 \right) \right]$$

$$R_y = \frac{45}{128} \frac{p r^2}{\epsilon^2} \left[ 1 - \frac{x^2}{r^2} - 4 n^2 \text{Log} \frac{r}{x} - a \left( \frac{r^2}{x^2} - 1 \right) \right]$$

La carga  $R_y$  es cero para  $x=r_0$  i  $x=r$ , i bastará considerar el valor absoluto máximo de  $R_x$  que tiene lugar para  $x=r$ , i es igual a

$$R = \frac{45}{64} \frac{p r^2}{\epsilon^2} \left( 1 - 2 n^2 - a \right)$$

Si se quiere saber cuáles son para  $x=r_0$  i  $x=r$  los valores de  $R_x$ , se podrá tener recurriendo a la tabla siguiente:

|                       |         |       |  |
|-----------------------|---------|-------|--|
|                       | $n=0.1$ | $0.2$ | $0.4$                                  |
| para $x=r_0$ , $R_x=$ | 0,64    | 0,54  | $0.32 \times \frac{p r^2}{\epsilon^2}$ |
| para $x=r$ , $R_x=$   | 0,68    | 0,63  | $0.44 \times \frac{p r^2}{\epsilon^2}$ |

7.º—Placa anular empotrada en su contorno interior i exterior i cargada con  $p$  kilogramos por milímetro cuadrado.

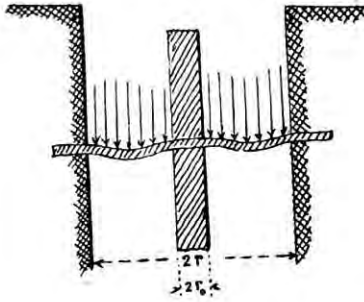


Fig. 6

Si se pone

$$\frac{r_0}{r} = n$$

$$\lambda = \frac{1}{1-n^2} \text{Log} \frac{1}{n}$$

$$\mu = \frac{1+n^2-4n^2\lambda}{1-4n^2\lambda^2}$$

se tendrá:

$$R_x = \frac{45}{128} \frac{p r^2}{\epsilon^2} \left[ 1 - 3 \frac{x^2}{r^2} - \mu \left( \text{Log} \frac{r}{x} - 1 \right) - n^2 (\lambda \mu - 1) \left( \frac{r^2}{x^2} + 1 \right) \right]$$

Esta expresion es máxima para  $x = r_0$  i tiene entónces por valor

$$R = \frac{45}{64} \frac{p r^2}{\epsilon^2} \left[ -1 + n^2 + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \mu \right]$$

Los diversos valores de  $R_x$  para  $x = r_0$  i  $x = r$ , son, por lo demas, dados en la tabla siguiente:

|                  |              |        |        |        |  |
|------------------|--------------|--------|--------|--------|--|
|                  | $n = 0,1$    | $0,2$  | $0,3$  | $0,4$  | $0,5$                                  |
| para $x = r_0$ , | $R_x = 0,81$ | $0,49$ | $0,32$ | $0,21$ | $0,14 \times \frac{p r^2}{\epsilon^2}$ |
| » $x = r$ ,      | $R_x = 0,30$ | $0,25$ | $0,20$ | $0,15$ | $0,11 \times \frac{p r^2}{\epsilon^2}$ |

§ 2

PLACAS RECTANGULARES

(Fórmulas de Grashof)

El problema de las placas rectangulares, es mas complicado aun que el de las placas circulares i no ha recibido todavia solucion satisfactoria. A continuacion apuntamos los resultados deducidos de las fórmulas de Grashof. (1)

1.—*Placa rectangular empotrada en su contorno i soportando una carga de p kilogramos por milímetro cuadrado.*

(1) Obra ya citada en el párrafo anterior; para las placas rectangulares las fórmulas de Grashof quedan léjos de presentar el mismo grado de rigor que las precedentes.

Se tiene al centro,  $K$ :

$$f = \frac{1}{32} \frac{a^4 b^4}{a^4 + b^4} \frac{p}{E \epsilon^3}$$

i por carga, en ese mismo punto, segun  $KX$  i  $KY$ ,

$$R_x = \frac{b^4}{2(a^4 + b^4)} \frac{p a^2}{\epsilon^2}$$

$$R_y = \frac{a^4}{2(a^4 + b^4)} \frac{p b^2}{\epsilon^2}$$

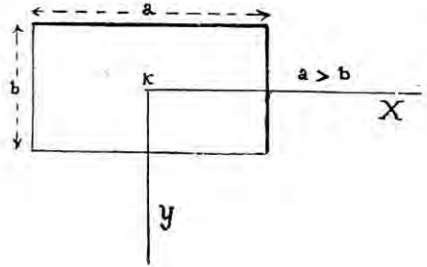


Fig. 7

El máximo de la fatiga tiene lugar en el punto  $K$  en el sentido del lado menor, con el valor dado mas arriba para  $R_y$  (1).

En el caso particular en que

$$a = b$$

$$f = \frac{p a^4}{64 E \epsilon^2}$$

$$R = \frac{p a^2}{4 \epsilon^2}$$

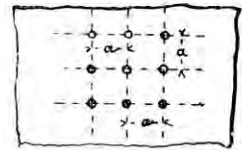


Fig. 8

2.º—Placa soportando una carga de  $p$  kilogramos por milímetro cuadrado i sostenida en puntos dispuestos en los vértices de cuadrados de lados  $a$ .

Llamando  $f$  la flecha que se produce en el centro de cada cuadrado i  $R$  la carga en este punto, es decir, aquí donde es máxima, se tiene:

$$f = \frac{15}{512} \frac{p a^4}{E \epsilon^3}$$

$$R = \frac{15}{64} \frac{p a^2}{\epsilon^2}$$

### § 3

#### PLACAS RECTANGULARES

(Fórmula de Navier)

Navier ha tratado el problema de las placas rectangulares suponiendo que el espesor de éstas es estremadamente pequeño; las fórmulas obtenidas por este jeómetra se

(1) Haciendo  $a = \infty$  en la fórmula de arriba, se llega a las fórmulas relativas a una viga empotrada en sus dos estremidades i soportando una carga uniformemente repartida.

presentan bajo la forma de series mui converjentes en las que se puede, en la práctica, no conservar sino los primeros términos, como lo vamos a hacer (1).

1.º—*Placa rectangular simplemente apoyada en su contorno i soportando una carga de  $p$  kilogramos por  $m/m^2$ .*

La flecha en el centro de la placa i la fatiga máxima que se produce en ese punto tiene aproximadamente por valor, suponiendo que  $a > b$

$$f = 0.19 \frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^2} \frac{p}{E \epsilon^3}$$

$$R = 0.92 \frac{a^4 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \frac{p}{\epsilon^2}$$

2.º—*Placa rectangular simplemente apoyada en su contorno i cargada en su parte central por un peso  $P$ .*

Se tiene en este caso para valores aproximados de  $f$  i  $R$ .

$$f = 0.46 \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)^2} \frac{P}{E \epsilon^3}$$

$$R = 2.28 \frac{a^3 b}{(a^2 + b^2)^2} \frac{P}{\epsilon^2}$$

Como lo muestran las fórmulas de este § 3 i el precedente, la fatiga  $R$  de una placa rectangular es, para un mismo valor de la carga total  $P$  o bien  $pab$ , independiente de las dimensiones de la placa; ella es—solamente—funcion de la razon  $\frac{a}{b}$  i del espesor  $\epsilon$ . Una observacion análoga se ha hecho para las placas circulares.

Santiago, Febrero de 1902

VÍCTOR LEON

(1) Consultar «*Le Résumé des leçons*» dadas en «*La Escuela de Puentes i Calzadas*», primera parte, segunda edicion, páj. 414. Se podrá consultar tambien la «*Theorie de l'élasticité des corps solides*, por Clebsch i de Saint-Venant, páj. 740 i la «*Résistance des matériaux*, por Flamant, páj. 547.

